Cvičný test 1

1) Rozhodněte, zda zobrazení $f: \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $f(ax^3+bx^2+cx+d) = (a+d)\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c$, je epimorfismus.

2) Definujte pojem báze lineárního prostoru. (není třeba definovat lineární obal)

3) Víte, že $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, a $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$ tvoří báze prostoru $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Ověřte jakýmkoli způsobem, že platí (nevyžaduje GEM)

$$T_{B \mapsto C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Spočtěte souřadnice matice $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi C.

Cvičný test 2

1) Dokažte, že zobrazení $g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$,

$$g\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3c-a\\b\end{pmatrix},$$

je lineární, a určete $\mathrm{im}(g)$.

2) Definujte pojem lineární závislost podmnožiny lineárního prostoru.

3) Zobrazení $f, g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ jsou určená maticemi A, B, tj. $\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$: $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=A.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=B.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Dále jsou dány vektory $c_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $c_2=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Lineární zobrazení $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ je dáno vztahem

$$h\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f\left(g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right),\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}}$$

a) Určete $h(5c_1-3c_2)$.

b) Dokažte, že C je báze $\mathbb{R}^2$.

c) Naleznete matici h vzhledem k bázím C a C. (inverzní matice nedopočítejte)

Cvičný test 3

1) Nechť $M=\left\{X\in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2): X^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$.

a) Určete, které z matic $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ náleží do množiny M.

b) Určete, zda M je lineární podprostor prostoru $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.

2) Definujte pojmy: isomorfismus, monomorfismus, epimorfismus. (netřeba definovat lineární zobrazení)

3) Jsou dány vektory v $\mathbb{Z}_{11}^3$,

$$v_1=\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0\\4\\9\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}.$$

a) Určete, zda je množina $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineárně nezávislá.

b) Rozhodněte, zda $\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{span}(v_1,v_2,v_3)$ platí $3x+6y+z=0$.