Řešení 2

1)
$$g\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3.(c_1+c_2)-(a_1+a_2) \\ b_1+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1-a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2-a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$
$$= g\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) \quad \forall \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Dále $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$:
$$g\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \\ \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha c - \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} 3c-a \\ b \end{pmatrix} = \alpha . g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$\Rightarrow$ g je lineární

Dále, $im(g) = \mathbb{R}^2$:

Zřejmě $im(g) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Naopak, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: $g\left(\begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tedy $\mathbb{R}^2 \subseteq im(g)$.

2) Nechť L je lineární prostor nad tělesem F, $M \subseteq G$.

M se nazývá:
- lineárně nezávislá, pokud $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in M\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F: \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{\theta} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$
- lineárně závislá, pokud není lineárně nezávislá

3) Matice zobrazení h vůči kanonickým bázím je

$$A_h^{K_2\mapsto K_2} = A.B = \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&4\\-2&2\end{pmatrix}$$

Tedy

a) $h(5c_1-3c_2) = \begin{pmatrix}5&4\\-2&2\end{pmatrix}.\left(5.\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-3.\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{pmatrix}5&4\\-2&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}19\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}67\\-52\end{pmatrix}$

b) C je LN, neboť c_1 není násobkem c_2 a c_2 není násobkem c_1. Tedy, jelikož $\dim(\mathbb{R}^2)=2$, je C báze.

c) $A_h^{C\mapsto C} = T_{K_2\mapsto C}.A_h^{K_2\mapsto K_2}.T_{C\mapsto K_2} =$

$= \begin{pmatrix}2&-3\\1&4\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}5&4\\-2&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&-3\\1&4\end{pmatrix}$