Řešení 3

1) a) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Do množiny M náleží

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

b) • $\vec{o}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in M$ ✓

• $X\in M,\ \alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow(\alpha.X)^2=\alpha^2.X^2=\alpha^2.\vec{o}=\vec{o}$
$\Rightarrow \alpha.X\in M$ ✓

• $X_1\in M, X_2\in M\Rightarrow X_1+X_2\in M$? Neplatí, neb
$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in M$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\in M$, ale $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\notin M$,
neb $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. $\Rightarrow M$ není lineární podprostor $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.

2) L_1, L_2 lineární prostory, $f: L_1\to L_2$ lineární zobrazení. f se nazývá:

• monomorfismus, pokud je prosté,
• epimorfismus, pokud je na,
• isomorfismus, pokud je bijekce.

3) a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ není LN, neb $2.v_1+v_2=v_3$, tedy $2v_1+v_2-v_3=\vec{o}$.

b) Tvrzení platí, neboť, pokud

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in span(v_1, v_2, v_3)$, pak $\exists a, b, c \in \mathbb{Z}_{17}^3$

splňující

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a.v_1 + b.v_2 + c.v_3 = a.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2a+4c \\ 4b+4c \\ 5a+9b+8c \end{pmatrix}.$$ Dále

$$3.(2a+4c) + 6.(4b+4c) + 5a+9b+8c =$$

$$= 6a+12c+24b+24c+5a+9b+8c =$$

$$= 11a+33b+44c = 11.(a+3b+4c) = 0.$$