Abstraktní a konkrétní lineární algebra

Definice

Lineární prostory nad $\mathbb{F}$

Definice (těleso)

Těleso je množina $\mathbb{F}$, vybavena dvěma funkcemi

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
   1. Existuje $0 \in \mathbb{F}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $a + 0 = 0 + a = a$ (existence nuly).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita sčítání).
   3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ platí: $a + b = b + a$ (komutativita sčítání).
   4. Pro vš. $a \in \mathbb{F}$ existuje právě jedno $b \in \mathbb{F}$ tak, že $a + b = 0$ (existence opačného čísla, značíme $b = -a$).

Definice tělesa (pokrač.)

2. Vlastnosti násobení:
   1. Existuje $1 \in \mathbb{F}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $1 \cdot a = a$ (existence jednotky).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativita násobení).
   3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení).
3. Provázanost sčítání a násobení:
   1. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (levý distributivní zákon).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (pravý distributivní zákon).
4. Test invertibility: pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $a \neq 0$ iff existuje a^{-1}.

Definice (lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$)

Lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina L spolu se dvěma funkcemi

$$+ : L \times L \to L, \quad \cdot : \mathbb{F} \times L \to L$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
   1. Existuje $\vec{o} \in L$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ (existence nulového vektoru).
   2. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (asociativita sčítání vektorů).
   3. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativita sčítání vektorů).
   4. Pro vš. $\vec{x} \in L$ existuje právě jeden $\vec{y} \in L$ tak, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$ (existence opačného vektoru).

Definice (lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$), pokrač.

2. Vlastnosti násobení skalárem:
   1. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (násobení jednotkovým skalárem).
   2. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$ (asociativita násobení skalárem).
3. Distributivní zákony:
   1. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ (distributivita součtu skalárů).
   2. Pro vš. $a \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ (distributivita součtu vektorů).

Definice

Seznam (také: skupina) vektorů je buď prázdná posloupnost () nebo konečná posloupnost $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Pozor: je rozdíl mezi seznamem a množinou

$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \neq (\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \{\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1\}$

$(\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2) \neq (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

Definice (lineární kombinace konečného seznamu vektorů)

Pro seznam vektorů tvaru

1. () definujeme $\vec{o}$ jako jeho (jedinou možnou) lineární kombinaci (s prázdným seznamem koeficientů).
2. $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je vektor $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ jeho lineární kombinace (se seznamem koeficientů $(a_1, \ldots, a_n)$).

Lineární obal a lineární podprostor

Definice (lineární obal množiny vektorů)

Ať M je jakákoli množina vektorů lineárního prostoru L. Lineární obal množiny vektorů M je množina $\operatorname{span}(M)$, definovaná takto:

$$\operatorname{span}(M) = \begin{cases} \{\vec{o}\}, \text{ pokud } M = \emptyset, \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in M \right\}, \\ \qquad \text{pokud } M \neq \emptyset. \end{cases}$$

Definice (lineární podprostor)

Ať W je podmnožina lineárního prostoru L. Řekneme, že W je lineární podprostor lineárního prostoru L, když platí $\operatorname{span}(W) \subseteq W$.

Definice (spojení lineárních podprostorů)

Ať $\{W_i \mid i \in I\}$ je systém lineárních podprostorů prostoru L. Lineárnímu podprostoru $\operatorname{span}(\bigcup_{i\in I} W_i)$ prostoru L říkáme spojení podprostorů W_i, $i \in I$, a značíme jej[a]

$$\bigvee_{i\in I} W_i$$

Lineární závislost a nezávislost

Definice

Lineární kombinace $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n$ je triviální, pokud $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
V opačném případě je lineární kombinace $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n$ netriviální.

Definice (lineární nezávislost seznamu vektorů)

Řekneme, že seznam S vektorů je lineárně nezávislý, pokud platí jedna z podmínek:

1. Seznam S je prázdný.
2. Seznam S je tvaru $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ a platí: kdykoli $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$, pak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Řekneme, že seznam S je lineárně závislý, pokud není lineárně nezávislý.

Definice (lineární nezávislost množiny vektorů)

Ať M je množina vektorů v lineárním prostoru L. Řekneme, že M je lineárně nezávislá, pokud platí jedna z následujících podmínek:

1. Množina M je prázdná.
2. $M = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ je neprázdná konečná množina a navíc platí: kdykoli $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$, pak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
3. M je nekonečná množina a každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá.

Řekneme, že množina M je lineárně závislá, pokud není lineárně nezávislá.

Definice (lineární nezávislost seznamu vektorů)

Řekneme, že seznam S vektorů je lineárně nezávislý, pokud platí jedna z podmínek:

1. Seznam S je prázdný.
2. Seznam S je tvaru $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ a platí: kdykoli $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$, pak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Řekneme, že seznam S je lineárně závislý, pokud není lineárně nezávislý.

Báze a dimense

Definice (množina generátorů)

Ať W je lineární podprostor prostoru L. Řekneme, že množina G generuje W, když platí $\mathrm{span}(G) = W$. (Říkáme také: G je množina generátorů podprostoru W.)

Definice (konečně generovaný podprostor)

Řekneme, že lineární podprostor W prostoru L je konečně generovaný, když existuje konečná množina jeho generátorů. (To jest, když platí $\mathrm{span}(G) = W$ pro nějakou konečnou množinu G.)

Definice (báze)

Lineárně nezávislé množině B, která generuje prostor L, říkáme báze prostoru L. Je-li B konečná, pak seznamu prvků B říkáme uspořádaná báze.

Definice (prostor konečné dimense)

Lineární prostor L má dimensi n (značíme: $\dim(L) = n$), když existuje báze B prostoru L, která má n prvků,[a] kde n je přirozené číslo.

Věta (o dimensi spojení a průniku)

Ať je L lineární prostor konečné dimense. Potom, pro libovolné lineární podprostory W_1, W_2, platí rovnost
$\dim(W_1 \vee W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Souřadnice vzhledem k uspořádané bázi a komutativní diagramy

Věta (existence souřadnic vzhledem k uspořádané bázi)

Ať seznam $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ tvoří bázi lineárního prostoru L. Pro každý vektor $\vec{x}$ v L existuje jediný seznam $(a_1, \ldots, a_n)$ prvků $\mathbb{F}$ tak, že $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{b}_n$.

Definice (souřadnice vzhledem k uspořádané bázi)

Seznamu $(a_1, \ldots, a_n)$ z předchozí věty říkáme souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k uspořádané bázi $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$. Značení:[a]

$$\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Lineární zobrazení

Definice (lineární zobrazení)

Ať L_1, L_2 jsou lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$, pro které platí $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{x}')$ a $\mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ pro vš a, $\vec{x}$, $\vec{x}'$, říkáme lineární zobrazení z L_1 do L_2.

Definice (matice)

Matice $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{F}$ typu $r \times s$ (také: rozměrů $r \times s$) je tabulka[a]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

[a] Budeme také používat položkový zápis $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$ nebo sloupcový zápis $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$.

Definice (součin matic)

Pro situaci[a]

$$\mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbb{F}^p \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbb{F}^r$$

$$\mathbf{e}_j \longmapsto \mathbf{a}_j \longmapsto \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$$

je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ matice,[b] jejíž j-tý sloupec je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$, kde $\mathbf{a}_j$ je j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$. Ve sloupcovém zápisu tedy platí
$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_s)$.

Matici $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ říkáme součin matic $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$.

Definice (speciální vlastnosti lineárních zobrazení)

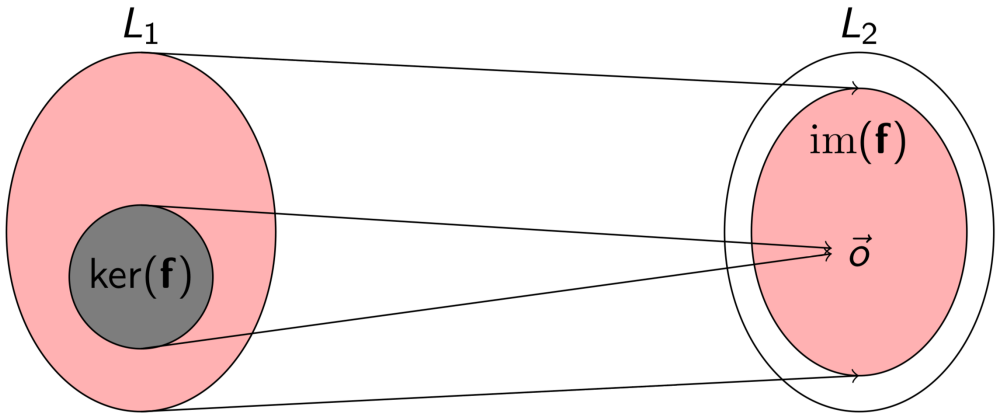
Lineárnímu zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ říkáme:

1. monomorfismus, je-li $\mathbf{f}$ injektivní (také: prosté) zobrazení.
2. epimorfismus, je-li $\mathbf{f}$ surjektivní (také: na) zobrazení.
3. isomorfismus, je-li $\mathbf{f}$ bijektivní (také: prosté a na) zobrazení.[a]

[a] Ekvivalentně: k zobrazení $\mathbf{f}$ existuje inversní zobrazení $\mathbf{f}^{-1}$ a toto inversní zobrazení je opět lineární.

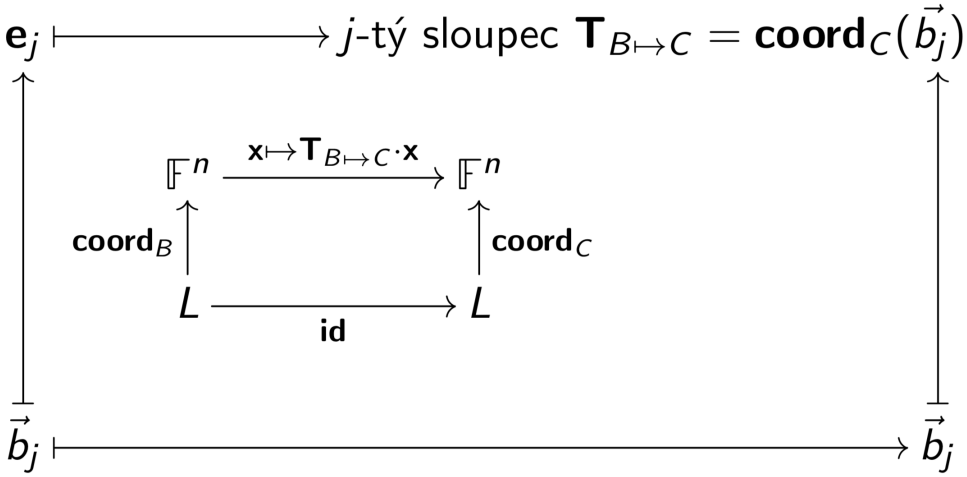
Definice (obraz a jádro)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množině
$\ker(\mathbf{f}) = \{\vec{x} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}\}$ říkáme jádro $\mathbf{f}$, množině
$\mathrm{im}(\mathbf{f}) = \{\vec{y} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{y}, \text{pro nějaké } \vec{x}\}$ říkáme obraz $\mathbf{f}$.



Definice (matice transformace souřadnic)

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$ jsou uspořádané báze prostoru L. Matici[a] $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$, která splňuje



GEM a soustavy lineárních rovnic, část 1

Definice (horní blokový tvar matice)

Matice $\mathbf{M}$ je v horním blokovém tvaru, jsou-li splněny následující dvě podmínky:

1. Každý nenulový řádek matice $\mathbf{M}$ je nad jakýmkoli řádkem samých nul.
2. Každý pivot (tj. nenulová položka první zleva) jakéhokoli nenulového řádku matice $\mathbf{M}$ je vždy více napravo než pivot předchozího řádku.

Definice (ekvivalentní soustavy)

Řekneme, že soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ a $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ r rovnic o s neznámých jsou ekvivalentní[a] (značení: $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$), když pro každý vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbb{F}^s$ platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

Věta (Frobenius)

1. Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení právě tehdy, když platí rovnost $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
2. Pokud $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení, potom lze říci následující:[a]

   Zvolme jakékoli $\mathbf{p}$, splňující rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.
   Potom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ platí právě tehdy, když $\mathbf{x}_0 = \mathbf{p} + \mathbf{x}_h$ pro nějaké $\mathbf{x}_h$ z $\ker(\mathbf{A})$.

[a] Budeme používat i zkrácený zápis: řešení lze napsat jako $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{p} + \mathbf{x}_h \mid \mathbf{x}_h \in \ker(\mathbf{A})\}$.

Důkaz.

1. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení právě tehdy, když $\mathbf{b}$ je v $\mathrm{im}(\mathbf{A})$. To nastane právě tehdy, když $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
2. Triviální.

■

Definice

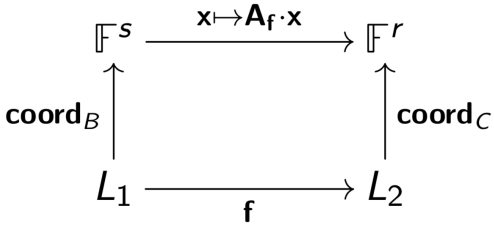
Zápisu $\mathbf{p} + \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ v $\mathbb{F}^s$, kde vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ jsou lineárně nezávislé, říkáme afinní podprostor dimense d v prostoru $\mathbb{F}^s$.[a] Seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ říkáme směr (také: zaměření) tohoto podprostoru.

Definice (regulární a singulární matice)

Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ typu je regulární (také: invertibilní, také: isomorfismus), pokud existuje jednoznačně určená matice $\mathbf{A}^{-1}$ taková, že platí rovnosti $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Matici $\mathbf{A}^{-1}$ říkáme inverse matice $\mathbf{A}$.
Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je singulární, pokud není regulární.

Definice (matice lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2. Matice zobrazení $\mathbf{f}$ (vzhledem k B a C) je taková matice $\mathbf{A}_\mathbf{f}$, pro kterou platí



Determinant: část 1

Definice (permutace)

Permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je jakákoli bijekce $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definice (symetrická grupa permutací)

Množině všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, spolu s výše uvedenou operací skládání $\cdot$, říkáme symetrická grupa permutací n-prvkové množiny. Značení: S_n.

Definice (determinant čtvercové matice)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ definujeme determinant jako skalár

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$$

Často se píše i $|\mathbf{A}|$ místo $\det(\mathbf{A})$.

Definice

Determinantu $A_{ij} = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$ říkáme algebraický doplněk posice (i, j) v matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Definice (adjungovaná matice)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ je její adjungovaná matice $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ transponovaná matice algebraických doplňků posic v matici $\mathbf{A}$.

Definice (soustava se čtvercovou maticí)

Rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, říkáme soustava se čtvercovou maticí.

Cramerova věta (také: Cramerovo pravidlo)

Ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava se čtvercovou regulární maticí nad $\mathbb{F}$.
Potom j-tá položka jediného řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ je tvaru

$$x_j = \det(\mathbf{A})^{-1} \cdot \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Vlastní hodnoty a vlastní vektory

Definice

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$ je λ v $\mathbb{F}$ vlastní hodnotou (také: vlastním číslem), pokud existuje nenulový vektor $\vec{x}$, splňující rovnost $\mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$.
Každému takovému nenulovému vektoru $\vec{x}$ říkáme vlastní vektor příslušný hodnotě λ.

Definice (charakteristický polynom čtvercové matice)

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 1$. Výrazu $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)$ říkáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ (značení: $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$).

Definice (násobnost kořene komplexního polynomu)

Komplexní číslo λ je kořen polynomu $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ násobnosti k, pokud platí rovnost $p(x) = (x - \lambda)^k \cdot q(x)$ pro $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ a $q(\lambda) \neq 0$.

Definice (nilpotentní zobrazení)

Lineárnímu zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, pro které existuje k tak, že $\mathbf{f}^k = \mathbf{o}$, říkáme nilpotentní. Nejmenšímu takovému k říkáme index nilpotence a značíme jej $\mathrm{nil}(\mathbf{f})$.

Definice

Čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$$

říkáme Jordanova buňka.[a]

[a] Buňka v této definici má rozměry $n \times n$.

Nalezení Jordanova tvaru matice $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$

Postupujeme takto:

1. Spočteme charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ matice $\mathbf{M}$.
   1. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ nelze v $\mathbb{F}[x]$ rozložit na součin kořenových faktorů, výpočet končíme. Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ neexistuje.
   2. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$ v $\mathbb{F}[x]$, Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ existuje a my postupujeme podle dalších bodů.
2. Jordanův tvar bude mít p Jordanových segmentů $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, p$. Segment $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$ má rozměry $m_i \times m_i$.
3. Nalezení i-tého segmentu $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$:
   1. Utvoříme nilpotentní matici $\mathbf{M} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}_n$. a nalezneme její Jordanův tvar $\mathbf{N}_i$ metodami minulé přednášky.
   2. Platí $\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \mathbf{N}_i + \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i}$.
4. Z Jordanových segmentů utvoříme Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ jakožto blokově diagonální matici.

Abstraktní skalární součin

Definice (reálný skalární součin)

Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Funkci $\langle - \mid - \rangle : L \times L \to \mathbb{R}$ říkáme skalární součin,[a] pokud platí následující, pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$:

1. Komutativita: $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle$.
2. Linearita ve druhé souřadnici: zobrazení $\langle \vec{x} \mid - \rangle : L \to \mathbb{R}$ je lineární.
3. Positivní definitnost: $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \geqslant 0$, $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$ iff $\vec{x} = \vec{o}$.

[a] Naše značení pro skalární součin je obvyklé ve fyzice (tzv bra-ket notation nebo Diracova notace) a má jisté výhody. Značení $\vec{x} \cdot \vec{y}$ pro skalární součin nebudeme používat! Důvod: přetížení značky $\cdot$ pro součin.

Tvrzení (nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski)

Platí $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}$.

Definice (ortogonalita vektorů)

Pokud $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$, mluvíme o ortogonálních (také: navzájem kolmých) vektorech.

Definice (positivně definitní matice)

Řekneme, že matice $\mathbf{G}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ je positivně definitní, když existuje matice $\mathbf{R}$ s lineárně nezávislými sloupci tak, že $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$.

Definice (ortonormální báze, čili normální a ortogonální báze)

Bázi $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ prostoru se skalárním součinem, která splňuje rovnost $\langle \vec{b}_i \mid \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij}$,[a] říkáme ortonormální.

[a] Kroneckerův symbol δ splňuje: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Definice (vzájemná poloha afinních podprostorů)

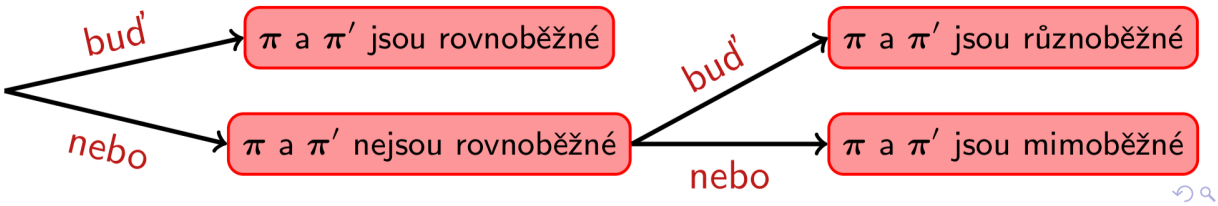
Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že

1. π a π' jsou rovnoběžné, pokud platí $W \subseteq W'$ nebo $W' \subseteq W$.
2. π a π' jsou různoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a mají alespoň jeden společný bod.
3. π a π' jsou mimoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod.

Dimensi lineárního podprostoru $W \cap W'$ budeme říkat stupeň rovnoběžnosti afinních podprostorů π a π'.

Poznámka

Pro dva afinní podprostory π a π' prostoru $\mathbb{R}^n$ platí:



Definice

Ať π a π' jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Reálnému číslu[a]

$$\omega(\pi, \pi') = \inf\left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \in \pi, \mathbf{x}' \in \pi' \right\}$$

říkáme vzájemná vzdálenost π a π'.

Vektorový součin

Definice (Gramova matice a Gramův determinant)

Ať matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ má sloupcový zápis $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, kde $k \leq n$.

1. Matici $\mathbf{A}^T\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ budeme říkat Gramova matice seznamu vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.
2. Determinantu $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ budeme říkat Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ a značit jej $\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Přepis definice vektorového součinu seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

$\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.