

Determinant - pokračování

nad $\mathbb{Z}_{137}$:

$$\begin{vmatrix} 32 & 15 & 14 \\ 34 & 17 & 85 \\ 65 & 99 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 32 & 15 & 14 \\ 34 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 + R_1 \end{matrix} = 17 \cdot \begin{vmatrix} 32 & 15 & 14 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ \frac{1}{17} R_2 \\ R_3 \end{matrix} = 17 \cdot (32 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 15) = 17 \cdot 2 = 34$$

nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 7074 & 543 & 443 \\ -342 & 727 & 627 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1+s_2+s_3 & s_2-s_3 & s_3 \\ 1000 & 100 & 327 \\ 2000 & 100 & 443 \\ 1000 & 100 & 627 \end{vmatrix} = 1000 \cdot 100 \cdot \begin{vmatrix} \frac{s_1}{100} & \frac{s_2}{100} & s_3 \\ 1 & 1 & 327 \\ 2 & 1 & 443 \\ 1 & 0 & 627 \end{vmatrix} =$$

$$= 10^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 327 \\ 0 & -1 & -217 \\ 0 & 0 & 294 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} = -294 \cdot 10^5$$

Definice:

• Matice nad $\mathbb{F}$ typu $n \times n$, $n \geq 2$. Označme A_{ij} matrici vzniklou z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce. Potom algebraický doplněk pozice (i, j) v mat. A je $(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$.

• Adjungovaná matice k A je transponovaná matice alg. doplněků A

• Je-li A regulární, potom $A^{-1} = (\det(A))^{-1} \cdot \text{adj}(A)$

Př.: Jsou-li $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pak $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Důkaz: $\det(A) = ad-bc$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot d & (-1)^{1+2} \cdot c \\ (-1)^{2+1} \cdot b & (-1)^{2+2} \cdot a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Př.: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$. Najděte $\text{adj}(A)$ a A^{-1} , pokud existuje.

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right)^T$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 10 & -1 & -8 \\ -20 & 5 & 20 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -20 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & -8 & 20 \end{pmatrix}$$

Plati: A je regulárny $(\Leftrightarrow) \det(A) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 8 + 18 - 12 - 8 + 12 = 10 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 10 & -20 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & -8 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

Fakt: Soustava $(A|b)$, kde A je čtvercová matice, má právě jedno řešení $(\Leftrightarrow)$

A je regulární. Navíc toto řešení je rovno $A^{-1} \cdot b$

Cramerovo pravidlo: Necht $(A|b)$ je soustava, kde A je regulární čtvercová matice. Pak j -tá souřadnice řešení x soustavy $(A|b)$ je:

$$(\det(A))^{-1} \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n), \text{ kde } A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

Př: Řešte soustavu nad $\mathbb{R}$ v závislosti na $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & -1 \\ a & 4 & 2 \end{array} \right) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

• A regulární $(\Leftrightarrow) \det(A) \neq 0 (\Leftrightarrow) 4 - a^2 \neq 0 (\Leftrightarrow) a^2 \neq 4 (\Leftrightarrow) a \neq \pm 2$

• pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ má soustava jediné řešení, a to

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4-a^2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix} \\ \frac{1}{4-a^2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{4-d^2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) = \left(\frac{1}{4-d^2} \cdot (-4-2d) \right) = \left(\frac{-2(\cancel{d+2})}{(2-d)(\cancel{2+d})} \right) = \left(\frac{-2}{2-d} \right) = \frac{1}{2-d} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a = -2 : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + 2R_1 \end{matrix} \dots \text{sonst nie Lösung dle}$$

$$\text{Frobeniusovy věty, neboť } \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = 1$$

$$\text{všechny řešení: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$a = 2 : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \end{matrix} \dots \text{sonst nie Lösung, neboť } \text{rank}(A) = 1, \\ \text{ale } \text{rank}(A|b) = 2.$$

Pr: Řešte nad $\mathbb{R}$ v závislosti na $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & a^2+3a \\ 1 & a+1 & 1 & a^3+3a^2 \\ 1 & 1 & a+1 & a^4+3a^3 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} (a+1)^3 + 1 + 1 - (a+1+a+1+a+1) &\neq 0 \\ a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + 1 + 1 - 3a - 3 &\neq 0 \\ a^3 + 3a^2 &\neq 0 \\ a^2(a+3) &\neq 0 \\ a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq -3 &\quad -27 \end{aligned}$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} :$$

$$\textcircled{1} \left(\begin{array}{ccc|c} a^2+3a & 1 & 1 & \\ a^3+3a^2 & a+1 & 1 & \\ a^4+3a^3 & 1 & a+1 & \end{array} \right) = a \cdot (a+3) \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ a & a+1 & 1 & \\ a^2 & 1 & a+1 & \end{array} \right) = a \cdot (a+3) \cdot \left((a+1)^2 + a^2 + a - (a^2(a+1) + 1 + a(a+1)) \right) \\ = a \cdot (a+3) \cdot (-a^3 + 2a)$$

$$\textcircled{2} \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a^2+3a & 1 & \\ 1 & a^3+3a^2 & 1 & \\ 1 & a^4+3a^3 & a+1 & \end{array} \right) = a \cdot (a+3) \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & \\ 1 & a & 1 & \\ 1 & a^2 & a+1 & \end{array} \right) = a \cdot (a+3) \cdot (2a^2 - a)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & a^2+3a & \\ a+1 & 1 & 1 & \end{array} \right)$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & a+1 & a^3+3a^2 \\ 1 & 1 & a^4+3a^3 \end{vmatrix} = a \cdot (a+3) \begin{vmatrix} 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a \cdot (a+3) (a^4+2a^3-a^2-a)$$

řešení:

$$\begin{pmatrix} -a^2+2 \\ 2a-1 \\ a^3+2a^2-a-1 \end{pmatrix}$$

$a=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{všechna řešení: } \text{span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$a=-3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} R_1 \\ 2R_2+R_1 \\ 2R_3+R_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{všechna řešení: } \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Př.: Určete podmínku ukazující, že roviny $x+y+z=1$, $ax+by+cz=1$,

$dx+ey+fz=1$ v $\mathbb{R}^3$ se protínají v jediném bodě a nalezněte tento bod.

Řešení: Roviny se protínají v jediném bodě $\Leftrightarrow$ soustava

$$x+y+z=1$$

$$ax+by+cz=1$$

$$dx+ey+fz=1$$

má právě jedno řešení $\Leftrightarrow A$ je regulární.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow bf+cd+ae-bd-ce-ad \neq 0$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & e & f \end{vmatrix} = bf + ce - b - f - e \cdot c$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ d & 1 & f \end{vmatrix} = f + c \cdot d + a - d - c - a \cdot f$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ d & e & 1 \end{vmatrix} = b + d + a \cdot e - d - e - d \cdot b$$

hledaný bod je tedy:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline bf + ce - b - f - e \cdot c \\ bf + cd + ae - bd - ce - df \end{array} \begin{pmatrix} bf + ce - b - f - e \cdot c \\ f + c \cdot d + a - d - c - a \cdot f \\ b + d + a \cdot e - d - e - d \cdot b \end{pmatrix}$$

Příklad:

1) Nalezněte $\det(A)$, $\text{adj } A$, A^{-1} pro $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$

2) Řešte nad $\mathbb{R}$ v závislosti na $a \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} a & 1 & 5 \\ -2 & a-3 & 5 \end{pmatrix}$

3) Nalezněte všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$, pro které má soustava jediné řešení:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 2 \\ b+c & a+c & a-b & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} &= 4 \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) \cdot 3 - 1 - (3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 2) \\ &= 8 + 18 - 6 + 12 - 2 \\ &= 29 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)^{1+1}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)^{1+2}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)^{1+3}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.4 & -1.3 \\ -7. & \\ 1. & \end{pmatrix}^T$$

