Vlastní hodnoty a vlastní vektory

Lin. prostor nad $\mathbb{F}$, $f: L \to L$ lineární. $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastní hodnota f, pokud

$\exists x \in L, \vec{x} \neq \vec{o} : f(\vec{x}) = \lambda . \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^T$$

- $\vec{x}$ je vlastní vektor f příslušný k λ.

- vlastní podprostor f příslušný k λ je $\text{eigen}(\lambda, f) = \{\vec{x} \in L : f(\vec{x}) = \lambda . \vec{x}\}$

Platí: $\text{eigen}(\lambda, f) = \ker(f - \lambda . id) \Rightarrow \text{eigen}(\lambda, f)$ je Lin. podprostor L

Definice: A je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Charakteristický polynom A je $\text{char}_A(x) = \det(A - x . E_n)$

Platí: $f: L \to L$, $\dim(L) = n$. Nechť B je lin. báze L, pak $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastní hodnota $f \Leftrightarrow \text{char}_{\left(A_f^{B \mapsto B}\right)}(\lambda) = 0$

① Nalezněte vlastní hodnoty a vlastní zobrazení.

$S_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\text{char}_{S_a}(x) = \det(S_a - x . E_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-x & a \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}\right)$$

$$= (1-x)^2$$

$\text{char}_{S_a}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ je jediné vl. číslo zobrazení S_a.

vl. podprostor:

$$\text{eigen}(1, S_a) = \ker(S_a - 1 . E_2) = \ker\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{a=0} \text{celé } \mathbb{R}^2 \\ \xrightarrow{a \neq 0} \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

(2) Nalezněte vl. hodnoty a vl. podprostory $M: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{char}_M(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ -4 & 4-x & 0 \\ -2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -4 & 4-x \end{vmatrix} = (2-x)(x^2-4x+4)$$

$$= (2-x)(x-2)^2$$

$\mathrm{char}_M(x) = 0 \iff x = 2$, $\lambda = 2$ je jediná vlastní hodnota M

$$\mathrm{eigen}(2, M) = \ker(M - 2E_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(3) vlastní hodnoty a vlastní podprostory derivace:

$\mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $\mathrm{der}(a \cdot x^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$

řešení:

zvolme $B = (1, x, x^2, x^3)$

$$A_{\mathrm{der}}^{B \to B} = \left(\mathrm{coord}_B(\mathrm{der}(1)), \mathrm{coord}_B(\mathrm{der}(x)), \mathrm{coord}_B(\mathrm{der}(x^2)), \mathrm{coord}_B(\mathrm{der}(x^3)) \right)$$

$$= \left(\mathrm{coord}_B(0), \mathrm{coord}_B(1), \mathrm{coord}_B(2x), \mathrm{coord}_B(3x^2) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A$$

$$\mathrm{char}_A(x) = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = x^4$$

$\mathrm{char}_A(x) = 0 \iff x = 0 \implies \lambda = 0$ je jediné vlastní číslo A, tedy i zob. der

$ch_A(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow \lambda=0$ je jediné vlastní číslo ...

$$\text{eigen}(0,A)=\ker(A-0E_4)=\ker\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\text{eigen}(0,\text{der})=\text{span}(1)$$

- potřebujeme nalézt $p(x)\in\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ splňující:

$$\text{coord}_B(p(x))=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\ldots\quad p(x)=1$$