

Definice: A, B matice $n \times n$ nad F , jsou si podobné. Pokud existuje T regulární $n \times n$ tak, že $A = T^{-1} \cdot B \cdot T \Leftrightarrow T \cdot A = B \cdot T \Leftrightarrow T \cdot A \cdot T^{-1} = B$.

- A je diagonální, pokud má mimo hlavní diagonálu 0.

- B je diagonalizovatelná, pokud je podobná diagonální matici.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$- B = T^{-1} A T, \text{ pak } B^k = \overbrace{(T^{-1} A T)(T^{-1} A T) \dots (T^{-1} A T)}^k = T^{-1} A^k T$$

Ekvivalentní podmínky:

1) A je diagonalizovatelná

2) $\text{char}_A(x)$ lze v F rozložit na součet lineárních činitelů a pro každou vlastní hodnotu λ platí: násobnost λ jakožto kořene $\text{char}_A(x) =$

$$= \underbrace{\dim(\text{eigen}(\lambda, A))}_{\text{geometrická násobnost } \lambda}$$

Př.: Matice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \neq 0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nejsou nad $\mathbb{R}$ diagonalizovatelné

Př.: Rozhodněte, zda lze diagonalizovat:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{R}$$

$$\text{char}_M(x) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & 2 \\ 6 & -4-x & 4 \\ 4 & -4 & 5-x \end{vmatrix} = (25 - 10x + x^2)(-4-x) - 48 - 48 - (8(-4-x))$$

$$-16 \cdot (5-x) - 78 \cdot (5-x) = -x^3 + 6x^2 - 17x + 6$$

$$\text{char}_M(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x^3 + 6x^2 - 17x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

h_s sobnost: 1 (1. mocnina)

$$-x^3 + 6x^2 - 17x + 6 : (x-1) = x^2 - 5x + 6$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$5x^2 - 17x + 6$$

$$-(-5x^2 + 5x)$$

...

$$\bullet \text{eigen}(1, M) = \ker(M - 1E_3) = \ker \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ 2R_2 - 3R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet \text{eigen}(2, M) = \ker(M - 2E_3) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet \text{eigen}(3, M) = \ker(M - 3E_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -7 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{h}_s \text{ sobnost} = \text{počet vektorů ve span})$$

$\Rightarrow M$ je nad $\mathbb{R}$ diagonalizovatelná

$$\underbrace{M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{M \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}} = \underbrace{1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Př: spočítáme M^{200} , $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{R}$

$$\text{char}_M(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = 1-2x+x^2+1 = x^2-2x+2$$

$$D = 4 - 8 = -4, \text{ tedy } \text{char}_M(x) \text{ nemá kořeny,}$$

$\Rightarrow M$ nelze nad $\mathbb{R}$ diagonalizovat

M je to ale užitečné nad $\mathbb{C}$:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

$\Rightarrow$ vlastní hodnoty $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$ násobnosti 1.

$$\bullet \text{eigen}(1+i, M) = \ker \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet \text{eigen}(1-i, M) = \ker \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^{200} & 0 \\ 0 & (1-i)^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}$$

$$1+i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$(1+i)^{200} = (\sqrt{2})^{200} \underbrace{\left(\cos 50\pi + i \cdot \sin 50\pi \right)}_1 = 2^{100}$$

$$(1-i)^{200} = (\sqrt{2})^{200} \underbrace{\left(\cos 350\pi + i \cdot \sin 350\pi \right)}_1 = 2^{100}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} = 2^{100} \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \text{ (výsledek je zase nad } \mathbb{R} \text{)}$$

Př.: Posloupnost $a_n, n \geq 0$ je zadána rekurentně

$$a_0 = 2, a_1 = 6, a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1}, n \geq 1$$

Nalezněte explicitní vzorec pro a_n :

$$\text{Pro } \forall n \geq 1 \text{ platí: } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1: \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

diagonalizujeme:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 32 \cdot 4^n - 2(-1)^n \\ 8 \cdot 4^n - 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$a_n = \frac{1}{5} (8 \cdot 4^n + 2(-1)^n)$$

Definice:

At L je lin. prostor nad $\mathbb{R}$. Funkce $\langle - | - \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ je

skalární součin, pokud $\forall x, y \in L$:

$$- \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$$

- zobrazení $\langle x | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární

$$- \langle x | x \rangle \geq 0 \text{ a } (\langle x | x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0})$$

Norma (délka) x je $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$

úhel mezi nenulovými $x, y \in L$ je $\varphi \in [0, 2\pi)$ splňující $\cos \varphi = \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Př.: Určujeme $\mathbb{R}^n$ se sk. součinem $\langle x | y \rangle = x^T \cdot y$

1) pro vektory $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ spočítejte $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$
a $\cos \varphi$ úhel mezi x, y .

$$\langle u | v \rangle = (2 \ -3 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 3 + 4 = 3$$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{(2 \ -3 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{17}$$

$$\|v\| = \sqrt{6}$$

$$\cos \varphi = \frac{\langle u | v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{3}{\sqrt{102}}$$

2) pro vektory $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ověřte platnost rovnosti:

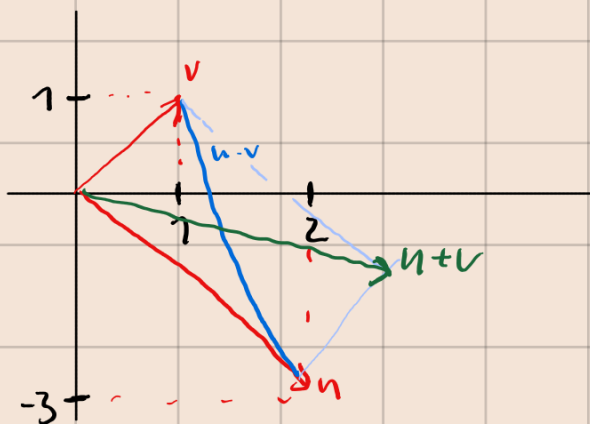
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad \text{+ geom. význam.}$$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v | u+v \rangle = (3 \ -2) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 13$$

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v | u-v \rangle = 17$$

$$\|u\|^2 = (2 \ -3) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 13$$

$$\|v\|^2 = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$



Součet 2. mocnin délek stran

rozumněrníky je roven součtu 2. mocnin
délek jeho uhlopříček

Definice:

Matice $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ je pozitivně definitní (PD), pokud je symetrická ($G = G^T$) a determinanty všech matic $(g_{ij})_{i,j=1}^k$, $1 \leq k \leq n$, jsou kladné

1) pokud G typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ je PD, potom

$$\langle x | y \rangle_G = x^T \cdot G \cdot y \text{ je sk. součin}$$

2) pokud $\langle - | - \rangle$ je sk. součin nad $\mathbb{R}^n$, pak $\exists!$ (PD) matice

G splňující $\langle - | - \rangle = \langle - | - \rangle_G$, G je metrický tenzor

či gramova matice $\langle - | - \rangle$

Př.: Rozhodněte, zda matice A, B jsou metrické tenzory

některého sk. součinu:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -9 \\ -1 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

Testy rozhodněte, zda A, B jsou PD.

- jsou symetrické? - Ano

$$|3| > 0 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 + 6 - 9 - 12 - 7 = -7 < 0$$

$\Rightarrow A$ není metrickým tenzorem.

$$|9| > 0$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 108 - 25 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -9 \\ -1 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 9 \cdot 9 \cdot 12 + 9 \cdot 5 \cdot (-1) - 12 \cdot 9 \cdot 9 - 5 \cdot 5 \cdot 5 - 9 \cdot 1 \cdot 1$$

neboť není PD

$$-25) - 12$$

$$= 12.8 > 0$$

$\Rightarrow B$ je PD, tedy
je metrickým tensorem

Př.: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

- je PD?
- $\cos \varphi$, φ úhel mezi e_1 a e_4 v $\langle - \rangle_G$

je symetrický

$$|1| > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

$$\cos \varphi = \frac{\langle e_1 | e_4 \rangle_G}{\|e_1\|_G \cdot \|e_4\|_G} = \frac{e_1^T \cdot G \cdot e_4}{\sqrt{e_1^T \cdot G \cdot e_1} \cdot \sqrt{e_4^T \cdot G \cdot e_4}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

