

Úkolody 2D a 3D geometrie

Př. Orovine $\mathbb{R}^2$ máme body $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

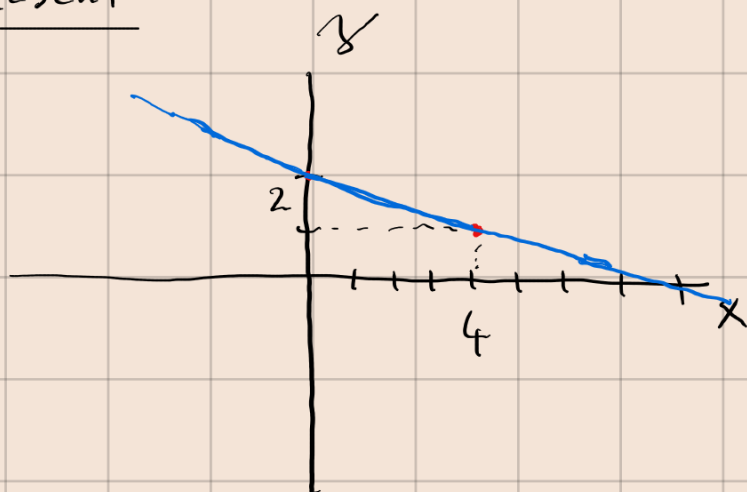
nájít přímku π .

1) rovnice parametrické rovnice π

2) rovnice obecnou rovnici π

3) rovnice normované rovnici π

Řešení



1) par. tvar:

Chceme π popsat jako množinu

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

pro nějaká $p_1, p_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$

přítelční bod

směr

↑
parametr

Ukážte pro libovolnou přímku v parametrické rovnici:

a) Ukážte, že alespoň jedno z čísel s_1, s_2 je nenulové

b) Co znamená, pokud jedno z čísel s_1, s_2 je nulové

c) Ukážte, že každá přímka π lze popsat rovnici

určen parametrem λ

Parametrický tvar

Zvolíme

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = b - a = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = a = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Sporem:

$$\text{Pokud } s_1 = s_2 = 0, \text{ pak } P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right\},$$

tedy P je bod, nikoliv přímka

b) P je rovnoběžná s jednou z os $x=0$ nebo $y=0$.

c) Chceme dokázat, že pro každý bod $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$\text{pokud } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{potom } \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$r_1 + \lambda_1 \cdot s_1 = r_1 + \lambda_2 \cdot s_1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_1$$

$$r_2 + \lambda_1 \cdot s_2 = r_2 + \lambda_2 \cdot s_2$$

$$\lambda_1 s_2 = \lambda_2 s_2$$

a) víme, že alespoň jedna z čísel s_1, s_2 je nenulové,
tímto podělíme příslušnou rovnici a dostaneme $\lambda_1 = \lambda_2$

2, všechny rovnice

Chceme popsat π ve tvaru

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x + a_2 y = b \right\},$$

pro nějaká $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$

Ukážte, že pro libovolnou přímku P v obecném tvaru
je nutné alespoň jedno z čísel a_1, a_2 nenulové
vina z (1), že:

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} :$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \text{ že}$$

$$x = 4 - a\lambda$$

$$y = 1 + 2\lambda \quad | \cdot \frac{a}{2}$$

$$x + \frac{a}{2}y = 4 + \frac{a}{2}$$

$$2x + ay = 8 + a$$

$$2x + ay = 7$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} \dots$ normálový vektor π
(kolmý na směr)

Příklad:

necht $a_1 = a_2 = 0$, pak $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 = b \right\}$

1) $b = 0 \dots$ pak $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 = 0 \right\} = \mathbb{R}^2$, což není přímka $\downarrow$

2) $b \neq 0 \dots$ pak $P = \emptyset$, což není přímka $\downarrow$

3) Normálová rovnice

Chceme π popsat jako množinu

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1(x - p_1) + a_2(y - p_2) = 0 \right\}$$

pro nějaká $a_1, a_2, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$.

Ukážeme: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \pi \Leftrightarrow 2x + 4y = 7$

$$2x + 4y - 7 = 0$$

$$2x - 2 + 4y - \frac{15}{4} = 0$$

$$(2x - 2) + 4\left(y - \frac{15}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{7}{2}\right) + 4y = 0$$

Př.

Interpretace přímek v $\mathbb{R}^2$ pomocí rovnice

$$2x - 4y = 2 \quad \text{a} \quad 2x + 4y = 2, \text{ pokud existují}$$

Řešení: Bod $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ je průsečíkem těchto dvou přímek

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$2x + 4y = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$2 + 4y = 2$$

$$4y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Př.

① Interpretace pomocí dvou a obecnou rovnici přímky máme body $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$p = a - b = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x = 1 + k$$

$$y = 2 - k$$

(2) Necht $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ jsou různé body. Holernete rovnici, která říká, že a, b, c leží v jedné přímce

Body a, b, c leží v jedné přímce $\Leftrightarrow c$ leží na přímce určené body a, b

$$\Leftrightarrow \underbrace{a + \lambda \cdot (b - a)}_{\text{pro popis přímky určené } b, a} = c; \text{ pro nějaké } \lambda \in \mathbb{R}$$

pro popis přímky
určené b, a

Př.

Určete parametrický rovn přímky v $\mathbb{R}^3$ určené body

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ a } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: Chceme rovnici π se tvaru

$$\left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{pro nějaká } r_1, r_2, r_3, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$$

$$r = a - b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Př. V $\mathbb{R}^3$ jsou 3 body $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

určíte rovnici π . Holernete

1) parametrický rovn π

Chceme π rovn se tvaru

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Zvolme } \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = a - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = a - c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) obecnou rovnici π .

Chceme napsat π jako:

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a_1 x + a_2 y + a_3 z = b \right\} \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

použijeme parametrický tvar (vycházíme z ed. vektorový rovnice)
(all set lang)

$$x = 1 + 0r_1 + 1r_2$$

$$y = 1 + 1r_1 + 0r_2$$

$$z = 0 + (-1)r_1 + (-1)r_2$$

tedy chceme najít a_1, a_2, a_3, b , tak aby platilo

$$a_1(1+r_2) + a_2(1+r_1) + a_3(-1-r_1-r_2) = b$$

$$a_1, a_2, a_3 = 1$$

$$1+r_2 + 1+r_1 - 1-r_1-r_2 = b$$

$$b = 2$$

Př.

Kopírujte všechny typy množin, které vzniknou zřetězením
přímek tří (ne nutně různých) roviny v $\mathbb{R}^3$.
Ze každé množiny uveďte příklad.

1. rovina - pokud budou roviny stejné

2. přímka - 

3. bod -

4. prázdná množina - jsou rovnoběžné

