

Lineární prostory nad tělesem F

Plati:

- 1) nulový vektor je určen jednoznačně
- 2) $\forall \vec{x} \in L : 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$
- 3) $-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}$
- 4) $\forall a \in F : a \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- 5) $\forall a \in F \quad \forall \vec{x} \in L :$
 $a \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$
nebo $\vec{x} = \vec{0}$

$M \subseteq L$ je lin. nezávislá (LN), pokud $\forall x_1, \dots, x_n \in M \quad \forall a_1, \dots, a_n \in F :$
 $a_1 \vec{x}_1 + \dots + a_n \vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$

M je lin. závislá (ZZ), pokud není LN.

Věta: Pro $\vec{x} \in L$ NTJE (indekují rovnice jsou ekvivalentní)

1) $\{\vec{x}\}$ je LN

2) $\vec{x} \neq \vec{0}$

Důkaz:

$1) \Rightarrow 2)$

necht $\{\vec{x}\}$ je LN. Pokud $\vec{x} = \vec{0}$, potom $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} = \vec{0}$,
ale $1 \neq 0$, proti tomu, že $\{\vec{x}\}$ je LN

$2) \Rightarrow 1)$

necht $\vec{x} \neq \vec{0}$. necht $a \cdot \vec{x} = \vec{0}$ pro nějaká $a \in F$. Potom
 $a = 0$ z 5, ve vlastnostech lin. prostoru. $\square$

Zvektory:

Tvrzení: Pro $\vec{x}, \vec{y} \in L \quad NT \supset B$:

1) $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ je L2

2) $\exists a \in F: a \cdot \vec{x} = \vec{y}$ nebo $a \cdot \vec{y} = \vec{x}$.

Důkaz:

$1) \Rightarrow 2)$

$$\{\vec{x}, \vec{y}\} \text{ je L2} \Rightarrow \exists a, b \in F: a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} = \vec{0},$$

ale buďto $a \neq 0$, nebo $b \neq 0$. Tedy:

$$a \cdot \vec{x} = -(b \cdot \vec{y}) = (-b) \cdot \vec{y}.$$

Pokud $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$... dostaneme $\vec{x} = a^{-1} \cdot (-b) \cdot \vec{y}$

Pokud $b \neq 0 \Rightarrow -b \neq 0 \Rightarrow \exists (-b)^{-1}$

$$\Rightarrow \vec{y} = (-b)^{-1} \cdot a \cdot \vec{x}.$$

$2) \Rightarrow 1)$

Pokud $a \cdot \vec{x} = \vec{y}$, pak $\vec{y} + (-a) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$(1 \cdot \vec{y}) \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow \{\vec{x}, \vec{y}\}$ je L2

Případ $a \cdot \vec{y} = \vec{x}$ analogicky

Př.:

Vyšetřete Lin. nezávislost množin:

$$1) \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subset (\mathbb{Z}_{11})^2$$

$$2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$3) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$1) \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subset (\mathbb{Z}_{11})^2$$

jeden je násobkem

druhého:

$$4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{L2}$$

$$2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$a + b + c = 0$$

$$2a + 0b + 3c = 0$$

$$3a + 0b + 2c = 0$$

vyřešim soustavu

$$\rightarrow a, b, c = 0 \Rightarrow LN$$

3) úplně stejné

$$a + b + c = 0$$

$$4a + 8c = 0$$

$$\cancel{3a + 6c = 0} \Rightarrow 0 = 0$$

$\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

zvolíme:

$$a = 1$$

$$1 - \frac{1}{2}c = 0$$

$$4 + 8c = 0$$

$$b = 1$$

$$8c = -4$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ je LZ.

Def:

Lineární obal množiny $M \subseteq L$ je

$$\text{span } M = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \vec{x}_i \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}, \right.$$

$$\left. \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Př.: vypočítejte $\text{span } M$ pro:

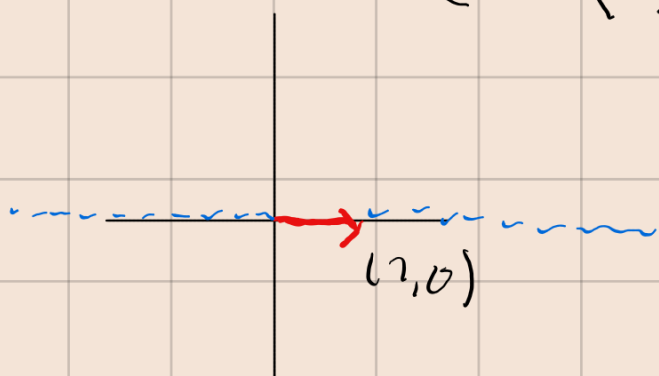
$$1) M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$2) M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$3) M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$1) M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{span } M = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$



$$2) M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{span } (M) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$3) M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{span } (M) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

Def: $M \subseteq L$ je lin. podprostor L ,
pokud $\text{span}(M) \subseteq M$.

$\Leftrightarrow \bullet \vec{0} \in M$

$\bullet \forall a \in F, \forall \vec{x}, \vec{y} \in M : \vec{x} + \vec{y} \in M, a \cdot \vec{x} \in M$

Pr: Pro $M, N \subseteq L$ rozhodnete o platnosti:

1) $\text{span}(M \cap N) = \text{span}(M) \cap \text{span}(N)$

2) $\text{span}(M \cup N) = \text{span}(M) \cup \text{span}(N)$

1) Ne, $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, pak $\text{span}(M) = \text{span}(N)$
 $= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \mid \text{span}(M \cap N) = \text{span}(\emptyset) = \vec{0}$

2) Ne, $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ pak $\text{span}(M \cup N) = \mathbb{R}^2$,

ale $\text{span}(M) \cup \text{span}(N) = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\} \neq \mathbb{R}^2$

Pr: Rozhodnete, zda M je lineární podprostor

L , pokud:

M	L	
$\{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0\}$	$\mathbb{R}$	(1)
$\{0\}$	$\mathbb{R}$	(2)
$\{(v, v^2) : v \in \mathbb{R}\}$	$\mathbb{R}^2$	(3)

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 4z = 0\}$	$\mathbb{R}^3$	(4)
$\{L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) : L \in \mathbb{Z}_5\}$	$\mathbb{Z}_5^2$	(5)

- (1) ne, protože není uzavřen pro násobení
- (2) je, $\{0\}$ je podmnožinou $\mathbb{R}$
- (3) není, je to polovina, ne celý prostor
- (4) v $\mathbb{R}^3$ jsou jen 4 druhy podprostorů:
 1) $\{0\}$ 2) přímka procházející $\{0\}$ 3) rovina procházející $\{0\}$ 4) $\mathbb{R}^3$
- (5) je

M	L	
polynomů stupně 2	$\mathbb{R}[x]$	(6)
polynomů stupně 3	$\mathbb{R}[x]$	(7)

- (6) není, protože neobsahuje nulu a nečíslo
- ne nemůžeme vždy nacházet nejvyšší stupeň: $x^2 - x^2 = 0$
- (7) ano, $0 \in M$

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) = (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

$$\bullet \mathbb{R}(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_3\mathbb{R}x^3 + a_2\mathbb{R}x^2 + a_1\mathbb{R}x + a_0\mathbb{R}$$

□

Definicija $M \subseteq L$

- M generuje L , pokud $\langle M \rangle = L$
- M je báze L , pokud generuje L a je LN
- $\dim(L) =$ počet prvků báze L

Platí: Pokud $\dim(L) = n \in \mathbb{N}$, pak pokud $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ je LN v L , pak $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ je báze L

Př: Ukázat, že následující množiny jsou báze $\mathbb{R}^3$
 $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 148 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

4) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

1) je množina je LN a má 3 prvky

2) ne, nena¹ 3 prvky

3) ne, more¹ je L2

4) konomico¹ bore = je + je L2 a ma¹ 3 prvky

