

Pr:

Mějme matice $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = (2 \ 3 \ 4)$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Spočítejte $A \cdot B$, $B \cdot A$, pokud jsou def.:

$$B \cdot A = (2 \ 3 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 4.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} (2 \ 3 \ 4) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

...

$$2) B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ 5 \cdot 7 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$3) A \cdot B \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ -3 + 2 \cdot 5 & -1 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 15 \\ 11 & 9 & 37 \end{pmatrix}$$

$$5) A^2 + 2E^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{NEDEF}$$

$$6) D \cdot C + C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 0 \cdot 3 & 3 & 0 + 7 + 7 \cdot 3 \\ -2 \cdot 7 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 4 & 0 & 0 + 7 + 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 34 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

7) hedeF

8) F.A.B.C

$$= (44)$$

$$9) \begin{pmatrix} 29 & -12 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$$

Nechť F je těleso, $n, s \in \mathbb{N}$, potom každé lineární zobrazení
 $T: F^s \rightarrow F^n$ ($n, s \in \mathbb{N}$, $\vec{x}, \vec{y} \in F^s$ $\forall a \in F: T(a \cdot \vec{x}) = a \cdot T(\vec{x})$,
 $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$), lze reprezentovat maticí nad

F , o n řádcích a s sloupcích. Násobení matic
 znamená skládání lineárních zobrazení

Př.:

Lineární zobrazení $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ je určeno hodnotami

$$M\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}, M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zapis matici:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) uctete $M\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 + 6 - 16 \\ 6 - 6 + 2 \\ -6 + 10 - 4 \\ -6 + 24 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 2 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Připomeňte geometrický význam následujících matic:

- $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X_n$... škálování osy x faktorem n
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = Y_n$... škálování osy y faktorem n
- $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R_\alpha$... rotace o úhel α
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_x$... projekce na osu x
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_y$... projekce na osu y
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$... změna souřadnic = zrcadlení podle osy 1. a 3. kvadrantu

Nalezněte matice zobrazení:

$$1) X_2 \cdot R_\pi \cdot X_{\frac{1}{2}} \cdot Y_{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X$$

$$2) P_x \cdot P_y \cdot R_{\frac{\pi}{6}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) P_x \cdot R_{\frac{\pi}{6}} \cdot P_y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4) T \cdot X_2 \cdot T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X_2$$

$\mathbb{F}$ těleso, $n \in \mathbb{N}$, pak jednotková matice řádu n nad $\mathbb{F}$

$$\text{je: } E_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}_n$$

Platí:

$$\forall A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n:$$

$$E \cdot A = A \cdot E = A$$

$$E_n \cdot A - A \cdot E_n = A$$

Pr.

Rozhodněte, zda pro matici $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí
implikace:

$$1) A^2 = E_2 \Rightarrow A = \pm E_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + bc = 1$$

$$\Rightarrow a = 1, d = 1 \text{ nebo } a = -1, d = -1$$

$$c(a+d) = 0$$

$$\text{Neplatí, např. pro } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b(a+d) = 0$$

$$cb + d^2 = 1$$

$$2) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Neplatí, např. pro } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Binomická věta pro matice

$\mathbb{F}$ těleso, A, B čtvercové matice nad $\mathbb{F}$ stejných rozměrů,
 $n \in \mathbb{N}$. Pokud $AB = BA$, potom:

$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A^j B^{n-j}$$

$$(A+B)^3 = \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} \cdot A^j \cdot B^{3-j}$$

$P_{\tilde{A}}$: spočítejte $= A^3 + 3A^2 + 3A + E_2$, kde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$= A^3 + 3A^2 \cdot E_2 + 3AE_2^2 + E_2^3 \stackrel{?}{=} (A+E_2)^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^3 + 3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^2 + 3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

