

Charakteristika lineárních zobrazení

L_1, L_2 lineární prostory, mezi nimi lin. zobrazení.

1) f se nazývá monomorfismus, pokud f je prosté

2) f se nazývá epimorfismus, pokud f je surjekce ($\text{Im}(f) = L_2$).

3) f je izomorfismus, pokud je mono. a epi.

$\ker(f)$: množina všech x , které zobrazení pošle do $\vec{0}$

$$\text{Im}(f) = \{f(\vec{x}) : \vec{x} \in L_1\}$$

$$\text{def}(f) = \dim(\ker(f))$$

$$\text{rank}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

• pokud $\dim(L_1) < \infty \Rightarrow \text{def}(f) + \text{rank}(f) = \dim(L_1)$

• pokud $\dim(L_1) < \infty \Rightarrow$ NĚ : 1) f je izomorfismus

2) f je mono. a epi

3) $\text{def}(f) = 0$ a $\text{Im}(f) = L_2$

4) $\text{def}(f) = 0$ a $\dim(L_1) = \dim(L_2)$

• pokud $\dim(L_1) = \dim(L_2) < \infty \Rightarrow$ NĚ :

1) f je iso

2) f je mono

3) f je epi

Př. 1: Nalezněte $\ker, \text{Im}, \text{def}, \text{rank}$ zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ následujících

matic :

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \textcircled{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \textcircled{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \textcircled{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{im}(A) = \{ A\vec{x} : x \in \mathbb{R}^2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ osa } x$$

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{im}(A)) = 1$$

$$\ker(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : A\vec{x} = \vec{0} \} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\} \dots \text{osa } y$$

$$\text{def}(A) = 1$$

Plati:

- f je monomorfismus $\Leftrightarrow \ker(f) = \{ \vec{0} \}$
- f je epimorfismus $\Leftrightarrow \text{im}(f) = \mathbb{C}_2$

$$\textcircled{2} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{im}(B) \dots \text{osa } y$$

$$\ker(B) \dots \text{osa } x$$

$$\text{rank}(B) = 1$$

$$\text{def}(B) = 1$$

$$\textcircled{3} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{im}(C) = \{ C\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

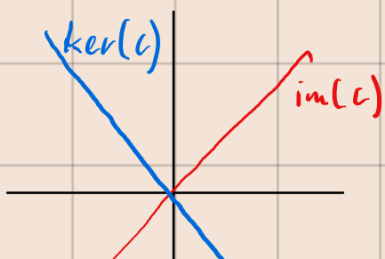
... osa 1. a 3. kvadrant u

$$\text{rank}(C) = 1$$

$$\text{def}(C) = 1$$

$$\ker(C) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : C\vec{x} = \vec{0} \} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = -y \right\}$$



... osa 2. a 4. kvadrantu

4)

$$D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Vkšieme, že je epimorfismus, tj. chceme
tú $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ nájsť $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ splňujúci $D\vec{y} = \vec{v}$.

Stačí položiť $\vec{y} = D^{-1}\vec{v}$. Potom

$$D\vec{y} = D(D^{-1}\vec{v}) = (D \cdot D^{-1}) \cdot \vec{v} = E_2 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$$

$\Rightarrow D$ je epimorfismus $\Leftrightarrow \text{im}(D) = \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \text{rank}(D) = 2$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(D)) = 0 \Rightarrow \ker(D) = \{\vec{0}\}.$$

Pri 2:

1) Určite dimenzi priestoru $\mathbb{R}[x]$.

2) Ukážte, že zobrazení $n: p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ je lineárne zobrazení
z $\mathbb{R}[x]$ do $\mathbb{R}[x]$. Nájdite jadro a obraz zobrazení n .

3) Ukážte, že $\alpha: \sum_{j=0}^k a_j x^j \mapsto \sum_{j=1}^k a_j x^{(j-1)}$ je lin. zobrazení
z $\mathbb{R}[x]$ do $\mathbb{R}[x]$. Spočítajte jadro a obraz α .

1) $\{1, x, x^2, \dots\}$ je báza priestoru $\mathbb{R}[x] \Rightarrow \dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$.

2) n je lineárne: $\alpha \in \mathbb{R}, p(x) \in \mathbb{R}[x]: n(\alpha \cdot p(x)) = x \cdot (\alpha \cdot p(x)) =$
 $= \alpha \cdot (x \cdot p(x)) = \alpha \cdot n(p(x))$

$$p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}[x]: n(p_1(x) + p_2(x)) = x \cdot (p_1(x) + p_2(x)) =$$
$$= x \cdot p_1(x) + x \cdot p_2(x) = n(p_1(x)) + n(p_2(x))$$

$$\ker(n) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : n(p(x)) = \vec{0}\} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : x \cdot p(x) = \vec{0}\} \\ = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\} \Rightarrow n \text{ je monomorfismus}$$

$$\operatorname{im}(n) = \{n(p(x)) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\} = \{x \cdot p(x) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\} = \\ = \left\{x \cdot \sum_{j=0}^n a_j x^j : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\sum_{j=0}^n a_j x^{j+1}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\right\} \\ = \left\{\sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} x^i, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\sum_{j=0}^n a_j x^j : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_0 = 0, n \in \mathbb{N}\right\} \\ = \{p(x) \in \mathbb{R}[x], p \text{ má nulový konstantní člen}\} \neq \mathbb{R}[x]$$

$\Rightarrow$ není epimorfismus

3) n je lineární

n je epimorfismus, ale není monomorfismus

Př. 3:

At $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ - (matice o 2 řádcích a 2 sloupcích nad $\mathbb{R}$)

a $f: \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \rightarrow \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ je lineární zobrazení definované předpisem $f(X) = X \cdot A$. Ukážete, že pokud A je regulární matice, potom f je monomorfismus a epimorfismus.

• A je regulární, pokud $\exists B: A \cdot B = B \cdot A = E_2$.

Řešení:

$$\ker(f) = \{X \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : X \cdot A = \vec{0}\} = \{\vec{0}\} \Rightarrow f \text{ je monomorfismus}$$

A je regulární $\Rightarrow A^{-1}$ existuje. Rovnice $X \cdot A = \vec{0}$ je ekvivalentní rovnici

$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = \vec{0} \cdot A^{-1} = \vec{0}$$

$$\parallel \\ X \cdot (A \cdot A^{-1}) = X \cdot E_2 = X$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{tedy:}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ je báze } \rightarrow \dim(\text{lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)) = 4$$

$\dim(f) < \infty \rightarrow f \text{ je mono} \Rightarrow f \text{ je epi.}$

Př. 4:

$$f(X) = X \cdot A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Najděte } \ker(f).$$

řešení: $\ker(f) = \left\{ X \in \text{lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : X \cdot A = \vec{0} \right\}$

$$= \left\{ X \cdot \text{lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ X \cdot \text{lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : \begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ c+2d & c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ b \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Př. 6: $\mathbb{F}$ těleso, $r, s \in \mathbb{N}$. Ukážete, že pro libovolnou regulární matici

$M: \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$ a libovolnou matici $A: \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ platí:

$$\text{def}(M \cdot A) = \text{def}(A) \quad \text{a} \quad \text{rank}(M \cdot A) = \text{rank}(A)$$

řešení: Ukážeme, že $\ker(A) = \ker(M \cdot A)$.

$$\bullet \ker(A) \subseteq \ker(M \cdot A) : \vec{x} \in \ker(A) \Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow (M \cdot A) \cdot \vec{x} = M(A \cdot \vec{x}) = M \cdot \vec{0} = \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{x} \in \ker(M \cdot A)$$

$$\bullet \ker(M \cdot A) \subseteq \ker(A) \quad \vec{x} \in \ker(M \cdot A) \Rightarrow M \cdot A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \text{a } M \text{ je regulární} \Rightarrow$$

$$M^{-1} \cdot (M \cdot A \cdot \vec{x}) = M \cdot \vec{0} \Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in \ker(A) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{def}(A) = \text{def}(M \cdot A)$$

$$\bullet \text{rank}(M \cdot A) = s - \text{def}(M \cdot A) = s - \text{def}(A) = \text{rank}(A) \quad \square$$

