

Matice lineárních zobrazení (vůči obecným bázím)

Definice:

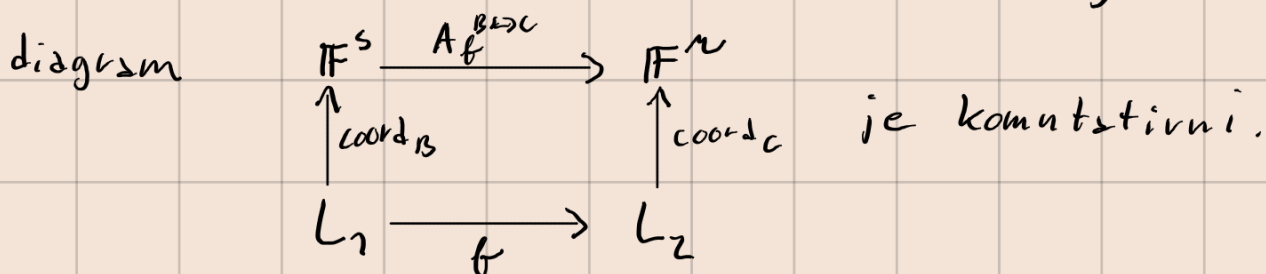
$B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$... báze lineárního prostoru L . $\forall x \in L \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$ splňující $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{b}_i$. Značíme $\text{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Platí:

- $\text{coord}_B(\vec{b}_i) = \vec{e}_i, i=1, \dots, n$
- $\text{coord}_B : L \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lin. zobrazení
- $\text{coord}_{K_n} = \text{id}$

$f: L_1 \rightarrow L_2$ lineární, $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je báze L_1 , $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$ je báze L_2 . Matice f vůči bázím B a C je matice $A_f^{B \mapsto C}$

o n řádcích a s sloupcích, jejíž j -tý sloupec je vektor $\text{coord}_C(f(\vec{b}_j))$

Platí: • $\forall \vec{x} \in L_1 : A_f^{B \mapsto C} \cdot \text{coord}_B(\vec{x}) = \text{coord}_C(f(\vec{x}))$, jinými slovy,



- L lineární, B, C báze L , pak $T_{B \mapsto C} := A_{\text{id}}^{B \mapsto C}$ se nazývá

matice transformace souřadnic z báze B do báze C

- $T_{B \mapsto C}$ je vždy regulární, a $(T_{B \mapsto C})^{-1} = T_{C \mapsto B}$
- $T_{B \mapsto B} = \text{id}$
- $T_{B \mapsto D} = T_{C \mapsto D} \cdot T_{B \mapsto C}$

Př:

V $\mathbb{R}^2$ jsou dány vektory $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1) ukážete, že $B = \{b_1, b_2\}$ je báze $\mathbb{R}^2$

2) nalezněte matici lineárního zobrazení f daného hodnotami

$$f(b_i) = v_i, i = 1, 2, \text{ vzhledem k bázím } B \text{ a } K_2$$

3) nalezněte $A_f^{K_2 \mapsto K_1}$

1) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \Rightarrow$ stačí ověřit, že B je LN. To platí, neboť b_1 není násobkem b_2 a naopak

2) chceme určit matici:

$$A_f^{B \mapsto K_2}. \text{ To je matice } A_f^{B \mapsto K_2} = \left(\text{coord}_{K_2}(f(b_1)), \text{coord}_{K_2}(f(b_2)) \right) \\ = \left(\text{coord}_{K_2}(v_1), \text{coord}_{K_2}(v_2) \right) = \left(\text{coord}_{K_2} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{coord}_{K_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Věta:

Ať $f: L_1 \rightarrow L_2$ lineární, B, B' báze L_1 , C, C' báze L_2 . Potom

$$A_f^{B' \mapsto C'} = T_{C \mapsto C'} \cdot A_f^{B \mapsto C} \cdot T_{B' \mapsto B}$$

$$3) A_f^{K_2 \mapsto K_2} = T_{K_2 \mapsto K_2} \cdot A_f^{B \mapsto K_2} \cdot T_{K_2 \mapsto B} =$$

$$\text{id} = E_2$$

$$= (T_{B \mapsto k_2})^{-1} = (\text{coord}_{k_2}(b_1), \text{coord}_{k_2}(b_2))^{-1} \\ = ((b_1), (b_2))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= E_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

Př. 2:

Nechť $B = (B_1, B_2, B_3, B_4)$, kde $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$. Pro lineární zobrazení

$$f: \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), f(x) = x \cdot A,$$

nalezněte $A_f^{B \mapsto B}$.

Řešení

$$A_f^{B \mapsto B} = (\text{coord}_B(f(B_1)), \text{coord}_B(f(B_2)), \text{coord}_B(f(B_3)), \text{coord}_B(f(B_4)))$$

$$\bullet \text{coord}_B(f(B_1)) = \text{coord}_B\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\right) = \text{coord}_B\left(\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{coord}_B(f(B_2)) = \text{coord}_B\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\right) = \text{coord}_B\left(\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{coord}_B(f(B_3)) = \text{coord}_B\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{coord}_B(f(B_4)) = \text{coord}_B\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Př. 3:

1) ukážete, že $C = ((x+2)^3, (x+2)^2, (x+2), 1)$ je báze $\mathbb{Z}_5[x]^{\leq 3}$

2) nalezněte $T_{C \mapsto B}$ pro $B = (1, x, x^2, x^3)$.

Řešení:

1) jelikož $\dim(\mathbb{T}_5^{\leq 3}) = 4$, stačí ukázat, že $\mathcal{L}$ je LN:

- $(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x \cdot 4 + 8 = x^3 + x^2 + 2x + 3$

- $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

- $x+2$

- 1

Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{T}_5^{\leq 3}$ splňují:

$$a \cdot (x^3 + x^2 + 2x + 3) + b \cdot (x^2 + 4x + 4) + c \cdot (x + 2) + d = \vec{0}$$

$$\hookrightarrow x^3 \cdot a + x^2(a+b) + x(2a+4b+c) + 3a+4b+2c+d \mid \vec{0}x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

$$\Rightarrow a=0$$

$$a+b=0 \Rightarrow b=0 \dots \dots \dots x^2$$

$$2a+4b+c=0 \Rightarrow c=0 \dots \dots \dots x^1$$

$$3a+4b+2c+d=0 \Rightarrow d=0 \dots \dots x^0$$

} $\Rightarrow \mathcal{L}$ je LN $\Rightarrow \mathcal{L}$ je báze

$$2) T_{\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{B}} = \left(\text{coord}_{\mathcal{B}}((x+2)^3), \text{coord}_{\mathcal{B}}((x+2)^2), \text{coord}_{\mathcal{B}}((x+2)), \text{coord}_{\mathcal{B}}(1) \right)$$

- $\text{coord}_{\mathcal{B}}((x+2)^3) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(x^3 + x^2 + 2x + 3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\text{coord}_{\mathcal{B}}((x+2)^2) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(x^2 + 4x + 4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\text{coord}_{\mathcal{B}}(x+2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\text{coord}_{\mathcal{B}}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T_{\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Př. 4:

Vysáďte matici rotace o úhel α proti směru hodinových ručiček vzhledem k bázi B a B_1 , kde:

$$B = (a, b), \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{k_2 \mapsto B} = T_{B \mapsto k_2}^{-1} = \left(\text{coord}_B(a), \text{coord}_B(b) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A_f^{k_2 \mapsto k_2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$A_f^{B \mapsto B} = T_{k_2 \mapsto B} \cdot A_f^{k_2 \mapsto k_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Př. 5:

$A^T a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ jsou dva LN vektory v $\mathbb{R}^2$. Pro

lin. zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí $f(a) = f(b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nalezněte $A_f^{k_2 \mapsto k_2}$

$$A_f^{B \mapsto k_2} = \left(\text{coord}_{k_1}(f(a)), \text{coord}_{k_2}(f(b)) \right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_f^{k_2 \mapsto k_2} = \underbrace{T_{k_2 \mapsto k_2}}_{id} \cdot A_f^{B \mapsto k_2} \cdot \underbrace{T_{k_2 \mapsto B}}_{(T_{B \mapsto k_2})^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Př. 7:

Nechť $W \subseteq \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}$.

1) Dokažte, že W je lin. podprostor $\mathbb{R}^3$.

2) Určete $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ukážete, že a) $\text{span}(v_1, v_2) = W$

b) v_1, v_2, v_3 jsou LN.

3) Dejte geometrický význam lin. zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(v_1) = v_1,$
 $f(v_2) = v_2, f(v_3) = \vec{0}.$

4) Nalezněte $A_f^{v \mapsto v}$, kde $V = (v_1, v_2, v_3).$

5) Nalezněte $A_f^{k_1 \mapsto k_3}$.

Řešení:

1) W je rovina $\Rightarrow$ lin. podprostor $\mathbb{R}^3$

2) $\text{span}(v_1, v_2) \subseteq W$: Jelikož $v_1 \in W, v_2 \in W$, platí:

- $\text{span}(v_1, v_2) \subseteq \text{span}(W) = W$

- $W \subseteq \text{span}(v_1, v_2)$. Necht $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow y = -x - z$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in \text{span}(v_1, v_2)} = \begin{pmatrix} x \\ -x-z \\ z \end{pmatrix}$$

dokončit

