GEM

Elementární řádkové úpravy:

- vynásobení nenulovým skalárem
- přehození dvou řádků matice
- přičtení násobku řádku k jinému řádku

Tyto úpravy nemění hodnost matice

(1) Převeďte na horní blokový tvar. Určete jejich hodnost

(1) nad $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & -8 & 1 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & -8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ 2R_2+3R_1 \\ R_3-2R_1 \\ 2R_4-3R_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 & -97 \\ 0 & 0 & 22 & -194 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ 19R_3+8R_2 \\ 19R_4-3R_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 & -97 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4-2R_3 \end{array}$$

rank = 3

(2) nad $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2-2R_1 \\ R_3+R_1 \\ R_4-R_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3-R_2 \\ R_4-2R_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_3 \end{array}$$

rank = 3

Frobeniova věta

1) soustava $(A|b)$ má řešení právě tehdy, když $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$

2) Pokud p je libovolné řešení soustavy $(A|b)$, potom množina

$$\{p + x_h : x_h \in \ker(A)\}$$ jsou všechna řešení rovnice $(A|b)$

p ↓ partikulární řešení

(2) nad $\mathbb{R}$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_5 = 8$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 & -4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - 2R_1 \\ R_5 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 + R_3 \\ R_5 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{array}$$

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b) = 3$$

nalezněte partikulární řešení:

dosadíme

dosadíme $x_4 = 0, x_5 = 0$

$-2x_3 = 2$

$x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1$

$-2x_2 - 2x_3 = 3$

$-2x_2 + 4 = 3$

$2x_2 = 1$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 + \frac{1}{2} - 1 + 0,5 = \frac{1}{2}$

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \vec{o} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{def}(A) = \dim(\mathbb{R}^5) - \operatorname{rank}(A) = 2$

$\Rightarrow$ stačí najít 2 LN vektory

1) Dosadíme

$x_4 = 1, x_5 = 0$ a dopočítáme

x_3, x_2, x_1

$$\Rightarrow \text{vyjde} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Dosadíme $x_4 = 0, x_5 = 1$

a dopočítáme x_3, x_2, x_1

$$\Rightarrow \text{vyjde} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{řešení}: \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$