

# Determinant

nad  $\mathbb{R}$

$$\textcircled{1} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Sarrusovo pravidlo:

$$= (2 \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 5 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 1) - (3 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot (-1)) = 0$$

## Výpočet det. pomocí GEM

- 1) Prohození dvou řádků změní znaménko det.
- 2) Vynásobení řádku skalárem změní det.  $\cdot x$ .
- 3) Přičtení lin. kombinace ostatních řádků k řádku nezmění det.

- $\det(A) = \det(A^T) \Rightarrow 1, 2, 3$  platí i pro sloupcové úpravy
- det horní trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále

nad  $\mathbb{Z}_5$ :

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 4^{-1} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ 4R_2 - 3R_1 \\ 2R_3 - R_1 \\ 4R_4 - R_1 \end{array} =$$

$$= 4^{-1} \cdot 4^{-1} \cdot 2^{-1} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 + R_2 \end{array} = \underbrace{4^{-1} \cdot 4^{-1} \cdot 2^{-1}} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 + 2R_3 \end{array}$$

$$4^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 4^{-1} \leftarrow \mathbb{Z}_5$$

$$= \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 4}_{\text{konst.}} \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0}_{\text{hodně nul}} = 0$$

Spočítejte nad  $\mathbb{R}$  rozvojem podle řádky / sloupce :

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \underline{0} & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \underbrace{0 \cdot (-1)}_{\text{konst.}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{\text{1. řádek 1. sloupce}} + \underbrace{0 \cdot (-1)}_{\text{vschekáme 1. sloupce}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \\
 & + \underbrace{0 \cdot (-1)}_{\text{3.}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \underbrace{1 \cdot (-1)}_{\text{4.}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \\
 & = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

Pokud má matice  $L2$  řádky nebo sloupce, potom  $\det(M) = 0$

Pro sloupce : • pokud je některý sloupec nulový, podle rozvoje

$$\text{bude } \det(M) = 0$$

• Necht'  $a_1 \dots a_n$  jsou sloupce matice  $M$  a jsou  $L2$ .

$$\text{Tedy } \exists d_1 \dots d_n \in \mathbb{F} : \sum_{i=1}^n d_i \cdot a_i = \vec{0} \text{ a } a_j \neq \vec{0}$$

$$\text{pro nějaké } j=1 \dots n. \text{ Tedy } \vec{0} = d_j \cdot a_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_i \cdot d_i = \vec{0}$$

$$= a_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_i \cdot d_j \cdot d_i^{-1} \Rightarrow \det(M) =$$

$$= \det(a_1 \dots a_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d_j^{-1} \cdot d_i \cdot a_i \dots a_n) = \det(a_1 \dots \vec{0} \dots a_n) = 0$$

nad  $\mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Kombinace GEM a rozvoje

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 \\ R_5 \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 \\ R_4 + R_1 \end{matrix} = 6(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot ((6 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 3) - (3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 6 + 5 \cdot 1 \cdot 1)) = 6$$

Spočítejte hodnotu a determinant matice  $A$  nad  $\mathbb{R}$  v závislosti

na parametru  $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & -s_4 & s_3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & a-2 \\ 0 & 1 & -1 & a-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 \end{matrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_3 \end{matrix} =$$

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 & R_3 - R_1 \\ & & & & R_4 - R_1 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -5 & a-2 & R_2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & R_4 \end{array} \right|$$

$$= (-1) \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & R_1 \\ 0 & 1 & -1 & a-1 & R_2 \\ 0 & 0 & -2 & a+1 & R_3 - 3R_1 \\ 0 & 0 & 1 & -2a+3 & R_4 - 2R_1 \end{array} \right|$$

$$= \frac{(-1)}{2} \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & R_1 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 & R_2 \\ 0 & 0 & -2 & a+1 & R_3 \\ 0 & 0 & 0 & -6a+7 & 2R_4 + R_3 \end{array} \right|$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(1)(-1)(-2)(-6a+7) = 6a+7$$

$$\text{rank}(A) = \begin{cases} 3, a = \frac{7}{6} \\ 4, a \neq \frac{7}{6} \end{cases} \quad (\text{podle výsledku})$$

had  $M$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \\ -9 & 9 & 3 \end{vmatrix} = (9 + 216 + 216) - (3 \cdot 36 + 3 \cdot 36 + 3 \cdot 36) = 117$$

had  $\mathbb{Z}_{11}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = (2 \cdot 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot 7 \cdot 7) - (8 \cdot 7 \cdot 4 + 7 \cdot 7 \cdot 2 + 7) = 4$$

had  $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 1 \cdot 7) - (6 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 0 + 5 \cdot 7 \cdot 4) = 6$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} s_1 & s_4 & s_3 & s_2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & a & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array} \right|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{B-2a, B:}{=} 3 - (3(a-1) - a) = -2a$$

$$\det(A) = -2a$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ 3R_2 - R_1 \\ 3R_3 - R_1 \\ 3R_4 - R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 31 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 37 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ 4R_3 - R_1 \\ 4R_4 - R_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 31 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 31R_4 - R_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 31R_4 - R_3 \end{matrix} = 48$$

add  $\pi$  131

$$\begin{vmatrix} 32 & 15 & 14 \\ 34 & 17 & 85 \\ 65 & 99 & 33 \end{vmatrix} =$$

32 15 14  
34 17 85  
65 99 33

