1) a)

Dokažte, že zobrazení $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3c-a \\ b \end{pmatrix}$$ je lineární

a určete $im(g)$.

Chci dokázat, že je zobrazení lineární. Tedy má být uzavřené na sčítání a násobení skalárem. Tedy očekávám, že bude platit obecně: $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ a $f(a \cdot \vec{x}) = a \cdot f(x)$, kde a je skalár, x, y jsou vektory.

Zde ověřím:

$$g\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$g\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3(c_1+c_2) - (a_1+a_2) \\ b_1+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1+3c_2-a_1-a_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3c_1-a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2-a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3c_1-a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2-a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Co se týká násobení skalárem:

$$g\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \\ \alpha d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3\alpha c - \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3c-a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \cdot g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

obojeplatí $\Rightarrow g$ je lineární.

b)

Určete $\mathrm{im}(g)$:

Obraz je množina všech $y \in L_2$, pro které platí $f(x) = y$, $x \in L_1$

$$g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3c-a \\ b \end{pmatrix}$$

$\mathrm{im}(g) = \mathrm{span}(g) = \mathbb{R}^2$ - pro obě složky vektoru $\begin{pmatrix} 3c-a \\ b \end{pmatrix}$ můžeme zvolit cokoliv $\in \mathbb{R}$, tedy výsledné vektory zobrazení se vstupem všech vektorů z $\mathbb{R}^4$ dají celé $\mathbb{R}^2$

(2) Lineární závislost podmnožiny lin. prostoru.

Nechť L je lineární prostor a $M \subseteq L$ je jeho lineární podprostor. M je lineárně závislý, pokud nesplňuje podmínky lineární nezávislosti. Tedy, že nelze nulový vektor vytvořit lineární kombinací vektorů z M jen za použití koeficientů 0, matematicky: platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i = \vec{o}, \text{ kde } x_1 \dots x_n \in M \text{ a } a_1 = \dots = a_n = 0$$

(3) $f, g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

a) určete $h(5c_1 - 3c_2)$

Určíme matici zobrazení vůči kanonickým bázím

$$A_h^{k_2 \to k_2} = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3+2.1 & 1.0+2.2 \\ -3+1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tedy

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.19 - 4.7 \\ -2.19 - 2.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95-28 \\ -38-14 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 67 \\ -52 \end{pmatrix}}}$$

b) Dokažte, že C je báze $\mathbb{R}^2$

Z definice báze B musí splňovat: $\qquad C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

1) B je LN

2) B generuje $\mathbb{R}^2$, tedy $\mathrm{span}(B) = \mathbb{R}^2$

1) $x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ x + 4y &= 0 \quad 1.2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 2x + 8y &= 0 \quad - \end{aligned}$$

$-11y = 0$

$\Rightarrow y = 0$

$x + 4.0 = 0$
$x = 0$ $\quad \Rightarrow B$ je LN.

2) stačí ukázat, že $\dim(B) = \dim(\mathbb{R}^2)$, tedy, že $\dim(B) = 2$,
což platí, protože $\dim(B) = \mathrm{card}(B) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

c) Naleznete matici h vzhledem k bázím C a C

$$A_h^{C\mapsto C} = T_{K_2\mapsto C} \cdot A_{K_2\mapsto K_2} \cdot T_{C\mapsto K_2}$$

$$= (T_{C\mapsto K_2})^{-1} \cdot A_{K_2\mapsto K_2} \cdot T_{C\mapsto K_2}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}5 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\cdot 2+4\cdot 1 & 5\cdot -3+4\cdot 4\\ -2\cdot 2+2\cdot 1 & 6+2\cdot 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix}14 & 1\\ -2 & 14\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}$$

---

korektní postup k 1:

$$g\left(\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3c-a\\ b\end{pmatrix}$$

chci zjistit $\mathrm{im}(g)$:

$$A_g^{K_4\mapsto K_2} = g(K_4) = g\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \left(g\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, g\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \dots\right)$$

$= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ — vezmeme jen LN sloupce:

$= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, což je právě počet prvků této báze.