1) Nechť $M = \{ X \in \mathcal{L}in(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$

a) určete, které z matic $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

náleží do množiny M.

zápis říká, že do M pokud jeho druhá mocnina je $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do M náleží matice: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Určete, zda M je lin. podprostor prostoru $\mathcal{L}in(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$:

- musí být lineární – uzavřený pro sčítání a násobení
  $(span(M) \subseteq \mathcal{L}in(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2))$
- existence nulového vektoru
  ↳ ten existuje protože $\vec{o}^2 = \vec{o}$

→ pro násobení skalárem:

$$(\alpha . X)^2 = \vec{o}$$
$$\alpha^2 . X^2 = \vec{o}$$
$$\alpha . \vec{o} = \vec{o}$$

↳ pro sčítání

$X_1 \in M, X_2 \in M = X_1 + X_2 \in M$?

vybere:

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ale $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M$

$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

=> M není lineární podprostor.

(2) Nechť $f: L_1 \to L_2$ je lin. zobrazení nad $\mathbb{F}$, L_1, L_2 jsou lin. prostory.

f se nazývá monomorfismus, pokud je prosté, epimorfismus, pokud je na a isomorfismus pokud je prosté i na

(3) Jsou dány vektory v $\mathbb{Z}_{11}^3$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) určete, zda je $\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. nezávislá

b) rozhodněte, zda $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ platí, že $3x + 6y + z = 0$

a) zjistíme, jestli rce má řešení pouze $a_1 = a_2 = a_3 = 0$:

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$2a_1 + 4a_3 = 0$$
$$4a_2 + 4a_3 = 0$$
$$5a_1 + 9a_2 + 8a_3 = 0$$

$$+2a_1 \quad +4a_3 = 0$$
$$+4a_2 + 4a_3 = 0$$
$$+5a_1 + 9a_2 + 8a_3 = 0$$

$$4a_3 = -2a_2$$

$$4a_2 - 2a_2 = 0$$

$$2a_2 = 0$$

$\to$ cokoliv $\% 11 = 0$

$\Rightarrow$ Není LN. $\Rightarrow$ Je LZ.

b) $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ jsou všechny lin. kombinace těchto vektorů:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 5a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4b \\ 9b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4c \\ 4c \\ 8c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 4c \\ 4b + 4c \\ 5a + 9b + 8c \end{pmatrix}$$

Ověříme, zda platí:

$$3x + 6y + z = 0$$

$$3(2a + 4c) + 6(4b + 4c) + 5a + 9b + 8c =$$

$$6a + c + 2b + 2c + 5a + 9b + 8c = 11a + 11b + 11c = 0$$

(protože počítáme v tělese $\mathbb{Z}_{11}$)