# Lineární algebra

## Báze a souřadnice

Matěj Dostál

ČVUT v Praze

21. října 2024

# Základní souřadnicové úlohy

V prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ máme dánu (uspořádanou) bázi

$$B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

1. Pro vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zjistěte jeho souřadnice vzhledem k bázi $B$, tedy zjistěte $\mathbf{coord}_B(\mathbf{v})$.
2. O vektoru $\mathbf{w}$ víte, že $\mathbf{coord}_B(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Spočtěte $\mathbf{w}$.

# Souřadnicová vlastnost a báze

V prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ je dán seznam vektorů $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. *Nevíme* o něm, zda je to báze $\mathbb{R}^2$. Naopak víme, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ existuje právě jedna dvojice skalárů $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}.$$

Ukažte, že z této vlastnosti plyne, že $B$ *je* báze $\mathbb{R}^2$.

# Exchange lemma

Nechť $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Ukažte, že pro vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se souřadnicemi

$$\mathbf{coord}_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

platí následující tvrzení:

Seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{v})$ je bází $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když $v_3 \neq 0$.

Dostali jste seznam $k$ vektorů z lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Pro každou z variant

- $k < n$
- $k = n$
- $k > n$

rozhodněte, zda následující tvrzení musí platit, může platit či nemůže platit:

1. Daný seznam je lineárně nezávislý.
2. Daný seznam generuje $\mathbb{R}^n$.
3. Daný seznam je bází $\mathbb{R}^n$.

Své tvrzení neformálně zdůvodněte.

Seznam vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, kde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

1. Promyslete, jak dokázat, že daný seznam skutečně tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.
2. Každý z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$. Spočtěte tyto lineární kombinace.

# Spojení a součet lineárních podprostorů

Ať $W_1, W_2$ jsou lineární podprostory $L$ nad $\mathbb{F}$. Spojení $W_1 \vee W_2$ je definováno jako $\operatorname{span}(W_1 \cup W_2)$. Součet $W_1 + W_2$ je definován jako $\{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$. Ukažte, že

$$W_1 \vee W_2 = W_1 + W_2.$$