Lineární algebra

Lineární nezávislost

Matěj Dostál

ČVUT v Praze

21. října 2024

Základní úlohy

1. Ukažte, že
$$\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{span}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix})$$
2. Vysvětlete geometrický význam řešení předchozího bodu.
3. Vektor $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ je lineární kombinací vektorů $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.
   Ukažte, že seznam vektorů
$$(\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix})$$
   je lineárně závislý (z definice lineární závislosti).

4. Seznam vektorů
$$\left(\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$
je lineárně závislý: víme, že
$$3\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$
Pro každý vektor ze seznamu ukažte, že je lineární kombinací ostatních vektorů.
5. Vymyslete seznam vektorů z lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, který je lineárně závislý, ale některý z daných vektorů není lineární kombinací ostatních.

Nezávislost, báze, dimense

V $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ mějme vektory

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je seznam $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ lineárně nezávislý. Nalezněte bázi a dimensi prostoru $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Nezávislost, báze, dimense

Nechť $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ je lineárním podprostorem prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$, kde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte bázi a dimensi prostoru V.

Ať $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ je lineárně nezávislý seznam vektorů z lineárního prostoru L nad $\mathbb{R}$. Která tvrzení jsou pravdivá?

1. Seznam $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3 + \vec{v}_4, \vec{v}_4 + \vec{v}_1)$ je lineárně nezávislý.
2. Seznam $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3 - \vec{v}_4, \vec{v}_4 - \vec{v}_1)$ je lineárně nezávislý.
3. Seznam $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3 + \vec{v}_4, \vec{v}_4 - \vec{v}_1)$ je lineárně nezávislý.
4. Seznam $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3 - \vec{v}_4, \vec{v}_4 - \vec{v}_1)$ je lineárně nezávislý.

Doplňovačka

Dostali jste seznam k vektorů z lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Pro každou z variant $k < n$, $k = n$ a $k > n$ rozhodněte, zda následující tvrzení musí platit, může platit či nemůže platit:

1. Daný seznam je lineárně nezávislý.
2. Daný seznam generuje $\mathbb{R}^n$.
3. Daný seznam je bází $\mathbb{R}^n$.

Své tvrzení neformálně zdůvodněte.

Seznam vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, kde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

1. Promyslete, jak dokázat, že daný seznam skutečně tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.
2. Každý z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$. Spočtěte tyto lineární kombinace.

Náročnější teoretická úloha

Ať $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ je báze lineárního prostoru L, a $n \geq 2$.
Ukažte, že i seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_n)$ je bází L.