Ve všech úlohách implicitně pracujeme nad tělesem reálných čísel.

Úloha 1 [5 bodů]

Napište si tabulku s čísly 1, 2, 3, 4 a 5. Ke každému číslu připište odpověď ANO či NE na otázku, zda je dané tvrzení pravdivé či nepravdivé. Odpovědi nemusíte zdůvodňovat. Správné odpovědi vs. získané body: (0,0),(1,0),(2,0),(3,1),(4,3),(5,5).

1. Matice se dvěma řádky a třemi sloupci nemůže být epimorfismus.
2. Mějme matici $\mathbf{A}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Matice $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}$ má nutně determinant $\det(\mathbf{A})^2+\det(\mathbf{A})$.
3. Zdvojnásobením řádku matice se může změnit její jádro.
4. Je-li vektor $\vec{u}$ řešením nějaké soustavy lineárních rovnic, pak je nutně řešením dané soustavy i vektor $2\cdot\vec{u}$.
5. Mějme matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ typu 4x4, obě s hodností 2. Jejich součin $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ může mít hodnost 0.

Úloha 2 [5 bodů]

U této úlohy nestačí pouze odpověď, svůj postup podrobně zdůvodňujte.

Nalezněte dvě různé matice $\mathbf{A},\mathbf{B}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ s hodností 2 takové, aby jejich součet měl hodnost 1. Pak nalezněte vektor $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, který není v obrazu matice $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Úloha 3 [10 bodů]

U této úlohy nestačí pouze odpověď, svůj postup podrobně zdůvodňujte.

Nalezněte množinu řešení soustavy zadané následující rozšířenou maticí $\left(\mathbf{A} \;\middle|\; \mathbf{b}\right)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Rozhodněte, zda je $\mathbf{A}$ epimorfismus: pokud ano, dokažte to, pokud ne, nalezněte příklad vektoru z $\mathbb{R}^3$ neležícího v $\mathrm{im}(\mathbf{A})$.