Písemná část zkoušky z lineární algebry pro obor Otevřená Informatika. Vzor 1.

Příklad 1 a) Užitím Hornerova schéma dokažte, že komplexní číslo j (tj. komplexní jednotka) je kořenem polynomu $P(x)$, kde

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$$

Pak najděte všechny kořeny polynomu $P(x)$.

b) Nechť $Q(x)$ je polynom tvaru $3 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + 6x^5$, kde $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ jsou celá čísla, Dokažte: Je-li α celočíselný kořen, pak to může být jenom ± 1 či ± 3.

Příklad 2 a) Je dána soustava rovic

$$\begin{aligned} 5x + 5y + z &= 2 \\ 3x - 4y - 3z &= 1 \\ -2x + y + z &= -1 \end{aligned} \quad .$$

Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{3,3}$ je matice této soustavy. Spočtěte $\mathbf{A}^{-1}$ a pomocí $\mathbf{A}^{-1}$ najděte řešení této soustavy. Pro získané řešení $x,\ y,\ z$ potvrďte hodnotu y Cramerovým pravidlem.

b) Formulujte Laplaceovu větu o determinantu součinu matic a naznačte myšlenku důkazu (co jsou matice typu GEM?). Pak dokažte: Je-li $\mathbf{A}$ regulární matice, pak

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

Příklad 3 a) Jsou dány 3 roviny $\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3$ v závislosti na parametrech $a,\ b$ ($a,\ b \in R$):

$$\begin{aligned} \varrho_1: &\quad x + y - 2z - 7 &= 0 \\ \varrho_2: &\quad -x + 2y + az - 2 &= 0 \\ \varrho_3: &\quad 2x + y - 3z + b &= 0. \end{aligned}$$

Diskutujte průnik $\varrho_1 \cap \varrho_2 \cap \varrho_3$ vzhledem k parametrům $a,\ b$.

b) Nechť $\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\vec{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ jsou vektory z V_3. Napište vyjádření vektorového součinu $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ v souřadnicích. Dokažte, že $\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Příklad 4 a) Předpokládejme, že lineární zobrazení $l : R^3 \to R^2$ je určeno následujícími podmínkami:

$$\begin{aligned} l(4, 0, -1) &= (1, 10) \\ l(1, 2, 3) &= (14, 32) \\ l(3, -1, 1) &= (4, 13). \end{aligned}$$

Ukažte, že tímto předpisem je lineární zobrazení l definováno korektně. Dále spočtěte $l(1, 1, -2)$ a najděte $\mathrm{Ker}(l)$.

b) Nechť L je lineární prostor a $\dim(L) = n$. Nechť K je nějaký lineární podprostor L. Dokažte, že existuje lineární zobrazení $l : L \to L$ takové, že $\mathrm{Im}(l) = K$. (Využijte báze L a báze K).

Písemná část zkoušky z lineární algebry pro obor Otevřená Informatika. Vzor 2.

Příklad 1 a) Uvažujte polynom

$$P(x) = x^7 - 4x^6 - 2x^5 + 13x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 12x + 9.$$

Užitím Hornerova schématu ukažte, že číslo -1 je kořenem $P(x)$ násobnosti 3. Víte-li dále, že číslo $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j$ je rovněž kořenem $P(x)$, najděte všechny kořeny polynomu $P(x)$.

b) Nechť L je lineární prostor. Dokažte: Vektory $\vec{a},\ \vec{b} \in L$ jsou lineárně nezávislé, právě když jsou vektory $\vec{a} + \vec{b},\ \vec{a} + 2\vec{b}$ lineárně nezávislé.

Příklad 2 a) Řešte soustavu (použijte GEM):

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x & +3y & -z & -u & = & 1 \\ x & -2y & +3z & +2u & = & 3 \\ 7x & & +7z & +4u & = & 11 \\ 5x & +11y & -6z & -5u & = & 0 \end{array}$$

b) Řešte soustavu:

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \qquad (\text{v } R^4).$$

Tvoří množina všech řešení této soustavy lineární podprostor R^4? Zdůvodněte.

Příklad 3 a) Uvažujte následující dvě přímky $p,\ q$:

$$\begin{array}{rll} p: & [-1, -3, 2] + t(3, -2, -1), & t \in R \\ q: & [2, -1, 1] + u(2, 3, 5), & u \in R. \end{array}$$

Ukažte, že $p,\ q$ jsou mimoběžky a veďte příčku těchto mimoběžek bodem $M = [-4, -5, 3]$.

b) Nechť $\vec{a}, \vec{b}$ jsou vektory z V_3. Předpokládejme, že $|\,\vec{a}\,| = 1,\ |\,\vec{b}\,| = 2$ a úhel vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ je $\frac{\pi}{3}$. S využitím vlastností skalárního součinu spočtěte $|\,\vec{a} - 2\vec{b}\,|$.

Příklad 4 a) Předpokládejme, že matice

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{rrr} 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{array} \right\|$$

je matice lineárního zobrazení $l : R^3 \to R^2$ vůči bázím $\mathcal{B} = \{(1,0,0),\ (0,-1,1),\ (1,1,1)\}$ a $\mathcal{B}' = \{(1,1),\ (1,2)\}$. Najděte $l(1,2,3)$ a určete $\mathrm{Ker}(l)$.

b) S použitím vlastních čísel a vlastních vektorů řešte soustavu diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{rcrr} \dot{x_1} & = & x_1 & +2x_2 \\ \dot{x_2} & = & 2x_1 & +x_2 \end{array}$$

Najděte dále řešení, splňující počáteční podmínku $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1$.

Písemná část zkoušky z lineární algebry pro obor Otevřená Informatika. Vzor 3.

Příklad 1 a) Je dána matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{2,2}$, $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$. Položme $M = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}^{2,2} \mid \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}$ (tj. M je množina všech matic, které s $\mathbf{A}$ komutují). Ukažte nejprve, že M tvoří lineární podprostor prostoru $\mathcal{M}^{2,2}$. Pak najděte nějakou bázi M.

b) Dokažte: Jsou-li $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektory z nějakého lineárního prostoru L, pak $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}+2\vec{b}, 3\vec{a}+\vec{b} \rangle$ (symbol $\langle\ \rangle$ značí lineární obal).

Příklad 2 a) Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & -1 \end{Vmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 9 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (\alpha \in R).$$

Položme $\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^6 + \mathbf{A}^7$. Diskutujte hodnost matice $\mathbf{C}$ v závislosti na parametru $\alpha \in R$ (zjistěte nejprve, čemu se rovná $\mathbf{A}^2$).

b) Vysvětlete jak Cramerovo pravidlo plyne z determinantové formule pro inverzní matici a z věty o rozvoji determinantu podle řádku (resp. sloupce).

Příklad 3 a) Spočtěte

$$\det \begin{Vmatrix} -4 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$$

b) Předpokládejte, že víte, že celá čísla 228, 323 a 456 jsou dělitelná číslem 19. Bez počítání determinantu dokažte, že

$$\det \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$$

je dělitelný číslem 19.

Příklad 4 a) Řešte maticovou rovnost $\mathbf{AX} = \mathbf{B} - \mathbf{CX}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

b) Dokažte, že na množině $\mathcal{M}^{n,n}$ všech čtvercových matic typu $n,\ n$ je relace podobnosti matic relací ekvivalence.