Výroková logika

- rozšířený systém spojek: ⇒ (implikace), ⇔ (ekvivalence), ∨ (OR), ∧ (AND), ¬ (NOT), ⊕ (XOR), | (NAND - Shefferova čárka), ↓ (NOR - Piersova šipka), tt (TRUE), ff (FALSE)
- Def.: (**formule VL**): Definujeme rekurzivně:
  - 1) každá log. proměnná je formule VL (tzv. atomická) (taktéž tt, ff)
  - 2) když α, □ jsou formule, pak také ¬α, α⇒□, … jsou formule
  - 3) každá formule vznikla konečným počtem kroků 1 a 2
- Def.: **Pravdivostní ohodnocení** je zobrazení u z množiny všech formulí nad At do množiny {0,1}, které respektuje sémantiku logických spojek.
  - u: Fle(At) → {0,1}
- Def.: Formule je **pravdivá v ohodnocení** u, když u(φ)=1.
- Def.: Formule je **splnitelná**, když existuje ohodnocení, v němž je pravdivá (tj. u(φ)=1).
- Def.: Formule je **tautologie**, když je pravdivá ve všech ohodnoceních.
- Def.: Formule je **kontradikce**, když není pravdivá v žádném ohodnocení.
- Def.: Formule φ, ψ jsou **tautologicky ekvivalentní**, když pro každé ohodnocení u platí: u(φ) = u(ψ).
- Def.: **Boolovská funkce** n proměnných je libovolná funkce f: $[0;1]^n \rightarrow \{0,1\}$, $f(x_1,\dots,x_n)=y$
  - formule jsou tautologie iff jim příslušné boolovské funkce jsou stejné
  - logický součet: x+y=max(x,y)
  - logický součin: x ⋅ y=min(x, y)
  - logický doplněk: x_hat = 1 - x
- Def.: **Úplný systém spojek** je taková množina spojek Δ, že pro každou formuli φ existuje formule φ_Δ, která má jen spojky z Δ tak, že platí $\varphi_\Delta=\varphi$.
- Def.: **Literál** je logická proměnná nebo její negace.
- Def.: **Minterm** je konjunkce literálů nebo jeden literál nebo žádný literál (tt).
- Def.: **Maxterm (klauzule)** je disjunkce literálů nebo jeden literál nebo žádný literál (ff).
- Def.: Formule je v **konjuntivní normální formě** (CNF), když je konjunkcí maxtermů nebo maxterm (nebo žádný - tt).
- Def.: Formule je v **disjunktivní normální formě** (DNF), když je disjunkcí mintermů nebo minterm (nebo žádný - ff).
- Def.: **Množina formulí S je splnitelná**, pokud existuje ohodnocení u, ve kterém jsou pravdivé všechny formule z S.
- Def.: **Množina formulí je pravdivá** v ohodnocení u, pokud jsou v něm pravdivé všechny formule z S.
- Def.: Nechť S je množina formulí a φ je formule. φ je **sémantický důsledek** S, pokud v každém ohodnocení u, kde jsou pravdivé všechny formule z S, je pravdivá také φ.
  - Alt. def.: S má za důsledek φ, pokud pro všechna ohodnocení u platí, že u(S)<=u(φ).
- Věta (**sémantický důkaz sporem**): Nechť S je množina formulí, φ je formule. S⊨φ iff S’=S ∪ {¬φ} je nesplnitelná.
- Def.: Nechť α, □ jsou klauzule s komplementárním literálem (např. x). Pak **resolventa** z α, □ přes x je disjunkce všech ostatních literálů z α, □, kromě x, ¬x.

- Def.: **Odvození (důkaz)** formule φ z množiny S je posloupnost formulí $φ_1,...,φ_n$, kde každá $φ_i$ (1≤i≤n) je buď formule z S nebo je to tautologický předpoklad nebo je $φ_i$ odvozena z předchozích některým pravidlem a všechny pomocné předpoklady jsou pasivní.
- Def.: φ je **logický důsledek** množiny formulí S, když existuje odvození pro φ z formulí v S.

Predikátová logika

- Def.: **Term** v PL:
    - 1) Každá proměnná a každá konstanta je term
    - 2) Je-li f funkční symbol arity n a jsou-li $t_1,…, t_n$ termy, pak $f(t_1,…, t_n)$ je term.
    - 3) Každý term vznikl konečným počtem kroků 1 a 2.
- Def.: **Syntaktický strom pro term**: pro proměnnou/konstantu jeden prvek, pro funkci arity n je to f s n syny
- Def.: **Formule PL**:
    - 1) Je-li P predikátový symbol arity n a jsou-li $t_1,..., t_n$ termy, pak $P(t_1,...,t_n)$ je atomická formule.
    - 2) Jsou-li α, □ formule, pak tt, ff a kombinace α, □ s log. spojkami jsou také formule.
    - 3) Je-li α atomická formule a x proměnná, pak ∀x α, ∃x α jsou formule.
    - 4) Každá formule vznikla konečným počtem kroků 1-3.
- Def.: **Vázaný výskyt** proměnné x je výskyt v podformuli ∀x α nebo ∃x α (aneb ve stromě cestou od x ke kořeni narazíme na kvantifikátor s x)
- Def.: **Volný výskyt** proměnné x je výskyt, který není vázaný.
- Def.: Proměnná x je **volná** ve φ, má-li v ní volný výskyt a **vázaná**, má-li v ní vázaný výskyt.
- Def.: **Sentence** je formule, která nemá volné proměnné.
- Def.: **Otevřená formule** je taková, která nemá vázané proměnné.
- Def.: **Interpretace** jazyka PL je dvojice (U, ⟦-⟧) (universum a význam speciálních symbolů), kde U≠Ø a
    - P predikátový symbol arity n má $⟦P⟧ \subseteq U^n$
    - f funkční symbol arity n má $⟦f⟧: U^n \to U$
    - a konstanta $⟦a⟧ \in U$
- Def.: **Kontext proměnných** je libovolné zobrazení ρ: Var → U.
    - ρ’ je updatem ρ v proměnné x, pokud se liší jen v hodnotě x.
    - interpretace termu t při kontextu ρ
        - $t = a \in$ Kons, pak $⟦t⟧_ρ = ⟦a⟧_ρ$
        - $t = f \in$ Var, pak $⟦t⟧_ρ = ρ(x)$
        - $t = f(t_1,...,t_n) \in$ Func , ar(f)=n, pak $⟦t⟧_ρ = ⟦f⟧_ρ(⟦t_1⟧_ρ,...,⟦t_n⟧_ρ)$
- Def.: **Pravdivost formule** v interpretaci při kontextu:
    - 1) Atomická formule $P(t_1,...,t_n)$ je pravdivá v interpretaci (U, ⟦-⟧) při kontextu ρ, když $⟦t_1⟧_ρ,...,⟦t_n⟧_ρ \in ⟦P⟧$
    - 2) Pravdivost složených formulí je určena pravdivostí atomických formulí, resp. sémantikou logické spojky.

    - 3) Formule $\forall x\, \alpha$ je pravdivá v interpretaci (U, [[-]]) při kontextu ρ, když α je pravdivá v interpretaci při všech updatech ρ’ kontextu ρ v proměnné x.
    - 4) Formule $\exists x\, \alpha$ je pravdivá v interpretaci (U, [[-]]) při kontextu ρ, když když α je pravdivá v interpretaci při aspoň jednom updatu ρ’ kontextu ρ v proměnné x.
- Def.: Sentence je **pravdivá v interpretaci**, když je v ní pravdivá při libovolném kontextu ρ. Tuto interpretaci nazýváme **model**.
- Def.: Sentence φ je **splnitelná**, pokud existuje interpetace, ve které je φ pravdivá (existuje model).
- Def.: Sentence φ je **tautologie**, pokud je v každé interpretaci pravdivá (všechny jsou modelem).
- Def.: Sentence φ je **kontradikce**, pokud není v žádné interpretaci pravdivá (neexistuje model).
- Def.: Množina sentencí S je **splnitelná**, když existuje interpretace, v níž je pravdivá každá sentence z S (je modelem množiny).
- Def.: Množina sentencí S má za **sémantický důsledek** sentenci φ, když v každé interpretaci, ve které je pravdivá S, je pravdivá také φ.
    - Aneb každý model pro S je modelem pro φ.
- Def.: Sentence φ, ψ jsou **tautologicky ekvivalentní**, pokud mají stejné modely.
- Def.: Formule φ je v **prenexním tvaru**, když má kvantikátory vepředu a pak následuje ψ, kde ψ je otevřená formule (tzv. otevřené jádro φ).
- Def.: Když klausule α, □ obsahují komplementární literály, pak **res(α, □)** je disjunkce zbylých formulí, má velký kvantikátor pro všechny proměnné.

Grafy

- Def.: **Graf** je dvojice (V, E), kde V je konečná neprázdná množina (prvky nazýváme vrcholy) a E je množina některých dvouprvkových podmnožin množiny V: E ⊆ (V nad 2)
    - můžeme povolit i “jednice” z V - smyčky
- Def.: **Graf** je trojice (V, E, ε), kde V je konečná neprázdná množina vrcholů, E je konečná množina názvů hran a ε je zobrazení incidence
- Def.: **Úplný graf** na n vrcholech K_n = (V, E), |V| = n
    - má n(n-1)/2 hran
- Def.: **Bipartitní graf**: G=(V, E), kde $V=V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2=\emptyset$ a každá e={u, v} ∈ E, má u ∈ V_1 a v ∈ V_2
- Def.: **Úplný bipartitní graf**: K_{mn}: $|V_1|$ = m, $|V_2|$=n
    - má m*n hran
- Def.: **Podgraf** grafu G=(V, E, ε) je graf G’=(V’, E’, ε’), kde V⊆V’, E⊆E’, ale s každou e={u,v} ∈ E’ jsou koncové vrcholy u,v ∈ V’
    - **podgraf indukovaný** množinou V’ obsahuje všechny hrany incidentní s koncovými vrcholy ve V’, které byly v G
        - *vyhodíme některé vrcholy a hrany z nich vedoucí*
    - **faktor grafu** je podgraf obsahující všechny vrcholy (V=V’) *vyhodíme některé hrany*
- Def.: **Stupeň vrcholu** je počet hran s ním incidentních (smyčka se počítá 2x), značíme deg(v) či d(v).
    - *součet všech stupňů je dvojnásobek hran - hand-shaking lemma*
- **R-regulární graf** má všechny vrcholy stupně r
- Def.: **Skóre grafu** (grafová posloupnost) je posloupnost stupňů všech vrcholů seřazená sestupně.
- Def.: Graf G=(V, E, ε) je **izomorfní** s G’=(V’, E’, ε’), když existují bijekce f: V → V’ a g: E → E’ a platí, že ε(e)={u,v} iff ε’(g(e))={f(u),f(v)}

- Def.: **Sled v grafu** G je posloupnost $v_0e_1v_1e_2...e_nv_n$, kde pro každé i, 1<=i<=n, je $e_i=\{v_{i-1}, v_i\}$.
    - Def.: **Uzavřený sled** je sled, kde $v_0=v_n$ a n>=1 (aspoň jedna hrana).
    - Def.: **Tah** je sled, kde se neopakují hrany.
    - Def.: **Cesta** je tah, kde se neopakují vrcholy (kromě $v_0=v_n$).
    - Def.: **Kružnice** je uzavřený sled, kde se neopakují hrany ani vrcholy (tah & cesta)
- Def.: Graf je **souvislý**, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta.
- Def.: **Komponenta souvislosti grafu** G je maximální souvislý podgraf (maximální ve smyslu - přidáme-li vrchol, porušíme souvislost).
- Def.: **Most** je hrana, jejímž odstraněním vznikne o komponentu souvislosti více.
- Def.: **Strom** je souvislý graf bez kružnic.
- Def.: Graf bez kružnice se nazývá **les** (aneb jeho komponenty souvislosti jsou stromy).
- Def.: Nechť G je souvislý graf. Faktor grafu G, který je stromem, se nazývá **kostra grafu** G.
- Def.: Nechť G=(V, E, ε) je souvislý ohodnocený graf (tj. je dáno zobrazení c: E → $\mathbb{R}^+$: c(e) je cena hrany e). Nechť K=(V, L, ε ↾ L), kde L⊆E je kostra v G, pak **cena kostry** c(K)= $\sum_{e \in L} c(e)$
    - Def.: **Minimální kostra** je kostra s nejmenší cenou ze všech koster.
- Borůvkův-Kruskalův algoritmus O(m*logm)
    - seřaď hrany podle ceny neklesajícně
    - vybere vždy nejlevnější hranu, že nevytvoří kružnici
- Jarníkův-Primův algoritmus $O(n^2)$
    - zvětšuje komponentu souvislosti o nejlevnější hranu, která z ní trčí

Orientované grafy

- Def.: **Orientovaný graf** G = (V, E) je dvojice, kde V je konečná neprázdná množina a E ⊆ V x V (orientované hrany)
- Def.: **Orientovaný graf** G = (V, E, ε), kde V je konečná neprázdná množina vrcholů, E je s ní disjunktní a ε je zobrazení incidence
    - ε: E → V x V: e ↦ (u,v)
- Def.: **Vstupní stupeň** u je počet hran, pro které je u koncový vrchol.
- Def.: **Výstupní stupeň** u je počet hran, pro které je u počáteční vrchol.
- Def.: **Stupeň vrcholu** $d(v)=d_{in}(v)+d_{out}(v)$
- Def.: Posloupnost $v_0e_1v_1e_2...e_nv_n$, kde pro každé i, 1≤i≤n, je $e_i=(v_{i-1}, v_i)$ nazýváme **orientovaný sled**.
    - analogicky orientovaný tah, cesta, kružnice - **cyklus**
- Def.: Posloupnost $v_0e_1v_1e_2...e_nv_n$, kde pro každé i, 1≤i≤n, je $e_i=(v_{i-1}, v_i)$ nebo $e_i=(v_i, v_{i-1})$ nazýváme **neorientovaný sled**.
- Def.: **Kořen** orientovaného grafu je takový vrchol v, že z něj vede orientovaná cesta do každého vrcholu.
- Def.: **Kořenový strom** je orientovaný graf, který je stromem a má kořen.
- Def.: Orientovaný graf je **acyklický**, když neobsahuje cyklus (smyčky jsou také zakázány).

- Def.: **Topologické uspořádání vrcholů** v orientovaném grafu G je takové uspořádání vrcholů do posloupnosti $v_1,...,v_n$, že pro každou hranu $e=(v_i,v_j)$ platí i<j.
- Def.: Pokud $d_{in}(v) = 0$, pak vrchol v nazýváme **zdrojem** grafu.
- Def.: Pokud $d_{out}(v) = 0$, pak vrchol v nazýváme **výlevkou** grafu.
- Def.: **Jádro** orientovaného grafu je množina vrcholů K⊆V taková, že platí:
  - 1) neexistuje hrana mezi vrcholy v K
  - 2) z každého vrcholu ve V∖K vede hrana do nějakého vrcholu v K
- Def.: Orientovaný graf je **silně souvislý**, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje orientovaná cesta.
  - graf je silně souvislý iff je souvislý a každá hrana leží v cyklu
- Def.: **Komponenta silné souvislosti** grafu G je každý jeho maximální silně souvislý podgraf.
- Def.: **Kondenzace** orientovaného grafu G je orientovaný graf G', který má za vrcholy komponenty silné souvislosti grafu G a hrany $(K_1,K_2) \in E'$ iff existuje vrchol $v \in K_1$ a $w \in K_2$ tak, že $(v,w) \in E$

Eulerovské grafy, barvení grafu a rovinné grafy

- Def.: **Eulerovský tah** v grafu G je takový tah, který obsahuje všechny vrcholy a všechny hrany. *(Hrany se neopakují, vrcholy mohou.)*
- Def.: Graf je **eulerovský**, když v něm existuje uzavřený eulerovský tah.
  - G je eulerovský iff je souvislý a každý vrchol má sudý stupeň
  - G má otevřený eulerovský tah, pokud právě dva vrcholy jsou lichého stupně
- Def.: **Obarvení** grafu je zobrazení b: V → B, kde B je množina barev, takové, že pro všechny vrcholy u, v platí, že pokud $\{u, v\} \in E$, pak $b(u) \neq b(v)$
- Def.: **Barevnost** grafu (chromatické číslo) je nejmenší počet barev potřebných k obarvení grafu.
- Def.: Říkáme, že graf je **k-barevný**, když k barev stačí k jeho obarvení.
- Def.: **Klika** v grafu je každá mnžoina vrcholů, která indukuje maximální úplný podgraf.
- Def.: **Klikovitost** grafu je počet vrcholů v nejpočetnější klice.
  - $\omega(G) \leq \chi(G)$
- Def.: **Maximální nezávislá množina** je množina vrcholů, která indukuje maximální možný diskrétní podgraf.
- Def.: **Nezávislost** grafu je počet vrcholů v nejpočetnější maximální nezávislé množině.
  - $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$
  - $\chi(G) \cdot \alpha(G) >= n$
- $\chi(G) \leq 1 + \max(d(v))$
- Def.: **Rovinné nakreslení** grafu je přiřazení vrcholům body v rovině a hranám spojité prosté (neprotínají samy sebe) křivky spojující příslušné body tak, že křivky se navzájem neprotínají.
- Def.: Graf je **rovinný**, pokud má rovinné nakreslení.
- Def.: **Sférické nakreslení** grafu je takové nakreslení grafu na kouli, že se nekříží hrany.
- Def.: G je rovinný graf spolu s rovinným nakreslením. Každá oblast roviny, která je ohraničená křivkami odpovídajícími hranám se nazývá **stěna**.

- Def.: **Stupeň stěny** je počet hran, které ohraničují danou stěnu, přitom hrana uvnitř stěny (most) se počítá 2x.
- Eulerův vzorec: Nechť G je souvislý rovinný graf s n vrcholy, m hranami a nechť je dáno rovinné nakreslení pro G, které má s stěn. Potom s=m-n+2.
- G souvislý rovinný graf n>=3 vrcholy a m hranami.
  - $m \leq 3n-6$
  - nemá-li G trojúhelníky, pak $m \leq 2n-4$