Predikátová logika

9. přednáška z LGR

Obsah

1. **Sémantika predikátové logiky**
   - Splnitelná formule, tautologie, kontradikce
   - Sémantický důsledek, tautologická ekvivalence
   - Prenexní tvar formulí

Sémantika predikátové logiky

Sentence a její model

Připomeňme, že sentence je formule, která nemá volné proměnné, a že pravdivost sentence nezávisí na kontextu proměnných, je určena pouze interpretací. Interpretace, ve které je sentence pravdivá, se nazývá model dané sentence.

Všechny následující sémantické pojmy budeme definovat **pouze pro sentence**.

Sémantika predikátové logiky

Definice

- *Sentence* je *splnitelná*, jestliže je pravdivá v alespoň jedné interpretaci (tj. jestliže má model).
- Sentence φ se nazývá *tautologie*, jestliže je pravdivá v každé interpretaci (tj. jestliže každá interpretace je jejím modelem).
- Sentence se nazývá *kontradikce*, jestliže je nepravdivá v každé interpretaci (tj. jestliže nemá model).

Sémantika predikátové logiky

Příklad

Formule $\varphi = \forall x\ x < x + 1$ je sentencí v jazyce s predikátovým symbolem $<$ arity 2, funkčním symbolem $+$ arity 2 a konstatním symbolem 1. Přitom x je proměnná a používáme infixní zápis.

- Sentence φ je splnitelná,
  jejím modelem je např. interpretace:
  $U = \mathbb{N}$, $[\![<]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2, m < n\}$, $[\![1]\!] = 1$,
  $[\![+]\!] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m + n$.
- Sentence φ není tautologie,
  protože v následující interpretaci není pravdivá:
  $U = \{0, 1\}$, $[\![<]\!] = \{(0, 1)\}$, $[\![1]\!] = 1$,
  $[\![+]\!] : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\} : (n, m) \mapsto \max(m, n)$ logický součet.

Sémantika predikátové logiky

Příklad

Formule $\psi = \forall x\, P(x) \Rightarrow P(a)$ je sentencí v jazyce s predikátovým symbolem P arity 1, konstatním symbolem a; x je proměnná.
Sentence ψ je tautologie.

Důkaz: Nechť $(U, [\![-]\!])$ je libovolná interpretace našeho jazyka.
Pokud $[\![P]\!] \neq U$, pak implikace ψ má nepravdivý předpoklad, tudíž je pravdivá v takové interpretaci.
Pokud $[\![P]\!] = U$, pak musí být též $[\![a]\!] \in [\![P]\!]$, tudíž implikace ψ má pravdivý předpoklad i závěr a je pravdivá v takové interpretaci.
Dokázali jsme, že sentence ψ je pravdivá v každé interpretaci.

Sémantika predikátové logiky

Poznámka

Snadnější bylo ověřit, že sentence je splnitelná, nebo že není tautologie, stačilo totiž najít jednu konkrétní interpretaci, která daný fakt dokazuje. Při ověřování faktu, že sentence je tautologie, jsme museli obecně prozkoumat všechny interpretace a zjistit, že jsou to modely naší sentence.

Sémantika predikátové logiky

Definice

Množina sentencí S je *splnitelná*, jestliže existuje interpretace, v níž jsou všechny sentence z množiny S pravdivé. Takové interpretaci říkáme model množiny sentencí S.

Množina sentencí S je *nesplnitelná*, jestliže nemá model, tj. v každé interpretaci je aspoň jedna sentence z S nepravdivá.

Tvrzení

Prázdná množina sentencí $S = \emptyset$ je splnitelná, dokonce každá interpretace je jejím modelem.

Sémantika predikátové logiky

Definice

Řekneme, že sentence φ je *sémantickým důsledkem* množiny sentencí S, jestliže v každé interpretaci, kde jsou pravdivé všechny sentence z S, je pravdivá také sentence φ (tj. jestliže každý model množiny S je také modelem sentence φ).
Značíme $S \models \varphi$ (nebo $\psi \models \varphi$, nebo $\models \varphi$, je-li $S = \emptyset$).

Sémantika predikátové logiky

Příklad

Nechť P je predikátový symbol arity 1, x je proměnná.

- $\forall x\, P(x) \models \exists x\, P(x)$
  Každý model sentence $\forall x\, P(x)$ má $[\![P]\!] = U$. Jelikož universum $U \neq \emptyset$, je taková interpretace též modelem sentence $\exists x\, P(x)$ (kde musí být $[\![P]\!] \neq \emptyset$).
- $\exists x\, P(x) \not\models \forall x\, P(x)$
  Např. interpretace $U = \mathbb{N}$, $[\![P]\!] = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ je sudé}\}$ je modelem první sentence, ale není modelem druhé sentence.

Poznámka

Opět je snažší dokázat, že sémantický důsledek neplatí (nalezením šikovné interpretace), než to, že platí.

Sémantika predikátové logiky

Tvrzení

- Je-li φ je tautologie, pak $S \models \varphi$ pro libovolnou množinu sentencí S.
- $\models \varphi$, právě když φ je tautologie.
- Je-li S nesplnitelná množina, pak $S \models \varphi$ pro libovolnou sentenci φ.
- $S \models \mathrm{ff}$, právě když S nesplnitelná množina sentencí.

Sémantika predikátové logiky

Věta (o sémantickém důkazu sporem)

Pro libovolnou množinu sentencí S a libovolnou sentenci φ platí:
$S \models \varphi$, právě když $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná.

Věta (sémantická o dedukci)

Pro libovolnou množinu sentencí S a libovolné sentence φ a ψ:
$S \cup \{\varphi\} \models \psi$, právě když $S \models (\varphi \Rightarrow \psi)$.

Speciální případ pro $S = \emptyset$:
$\varphi \models \psi$, právě když $\varphi \Rightarrow \psi$ je tautologie.

Sémantika predikátové logiky

Definice

Sentence φ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní, jestliže jsou pravdivé ve stejných interpretacích (tj. jestliže mají stejné modely). Značíme $\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi$.

Tvrzení

Pro libovolné sentence φ a ψ platí:

- $\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi$, právě když $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$.
- $\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi$, právě když $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie.

Sémantika predikátové logiky

Tautologicky ekvivalentní úpravy

V následujících formulích budeme používat jazyk s predikátovými symboly P, Q arity 1 a R arity 2; x, y budou proměnné.

- Platí všechny zákony pro tautologickou ekvivalenci týkající se logických spojek, které známe z výrokové logiky.
- Negování formulí s kvantifikátory:
  - $\neg\forall x\, P(x) \models\!\!\dashv \exists x\, \neg P(x)$
  - $\neg\exists x\, P(x) \models\!\!\dashv \forall x\, \neg P(x)$

Poznámka

Kvantifikátor $\forall$ je zobecněním konjunkce, zatímco kvantifikátor $\exists$ je zobecněním disjunkce. Zákony pro negování formulí s kvantifikátory jsou tak zobecněním DeMorganových zákonů.

Sémantika predikátové logiky

Příklad

Pro libovolnou formuli α je $\alpha \vee \neg\alpha \models\!\!\!\dashv \mathrm{tt}$.

Tudíž $\mathrm{tt} \models\!\!\!\dashv \forall x\, P(x) \vee \neg\forall x\, P(x) \models\!\!\!\dashv \forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x)$.

Sentence $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x)$ je tautologie.

Zatímco sentence $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, \neg P(x)$ tautologií není! Zkuste najít interpretaci, v níž je tato formule nepravdivá.

Sémantika predikátové logiky

Přehazování pořadí kvantifikátorů

- Lze přehodit pořadí stejných kvantifikátorů:
  - $\forall x \, \forall y \, R(x, y) \models\!\!\!\dashv \forall y \, \forall x \, R(x, y)$
  - $\exists x \, \exists y \, R(x, y) \models\!\!\!\dashv \exists y \, \exists x \, R(x, y)$
- Nelze ovšem přehodit pořadí různých kvantifikátorů!
  - $\exists x \, \forall y \, R(x, y) \models \forall y \, \exists x \, R(x, y)$
  - $\forall y \, \exists x \, R(x, y) \not\models \exists x \, \forall y \, R(x, y)$

Sémantika predikátové logiky

Důvod: V modelech sentence $\varphi = \exists x \, \forall y \, R(x, y)$ musí existovat speciální prvek $u_x \in U$, který je v relaci $[\![R]\!]$ se všemi prvky $v \in U$, tj. pro všechny $v \in U$ je $(u_x, v) \in [\![R]\!]$.
Zatímco v modelech sentence $\psi = \forall y \, \exists x \, R(x, y)$ musí pro každý prvek $v \in U$ existovat aspoň jeden prvek $u_v \in U$, který je s ním v relaci, tj. $(u_v, v) \in [\![R]\!]$. Prvek u_v nemusí nutně být stejný pro všechny prvky u.

Každý model sentence φ je modelem sentence ψ, naopak to však neplatí. Zkuste najít model pro ψ, který není modelem pro φ.

Sémantika predikátové logiky

Vytýkání kvantifikátorů před konjunkci a disjunkci

1) Lze vytknout $\forall$ před konjunkci a $\exists$ před disjunkci:

- $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \models\!\!\!\dashv \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$
- $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \models\!\!\!\dashv \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

2) V opačných kombinacích neplatí tautologická ekvivalence, pouze sémantický důsledek jedním směrem:

- $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \models \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \models \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$

Důvod: $\forall$ je zobecněním konjunkce, komutuje tedy pouze s $\wedge$, zatímco $\exists$ je zobecněním disjunkce, komutuje tedy pouze s $\vee$.

Sémantika predikátové logiky

Vytýkání kvantifikátorů před konjunkci a disjunkci

3) Pokud se proměnné vázané v různých podformulích jmenují jinak, tak můžeme vytknou oba kvantifikátory před konjunkci i disjunkci:

- $\forall x\, P(x) \wedge \forall y\, Q(y) \mathrel{|}\!\!\!= \!\!\!\mathrel{|} \forall x\, \forall y\, (P(x) \wedge Q(y))$
- $\forall x\, P(x) \vee \forall y\, Q(y) \mathrel{|}\!\!\!= \!\!\!\mathrel{|} \forall x\, \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$
- $\exists x\, P(x) \vee \exists y\, Q(y) \mathrel{|}\!\!\!= \!\!\!\mathrel{|} \exists x\, \exists y\, (P(x) \vee Q(y))$
- $\exists x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y) \mathrel{|}\!\!\!= \!\!\!\mathrel{|} \exists x\, \exists y\, (P(x) \wedge Q(y))$

Sémantika predikátové logiky

Vytýkání kvantifikátorů před konjunkci a disjunkci

Pohled na vytýkání kvantifikáturů zprava doleva:

3) Lze distribuovat oba kvantifikátory pod konjunkci i disjunkci, pokud se v obou podformulích jmenují proměnné jinak. Ke každé podfurmuli píšeme kvantifikátor jen s tou proměnnou, která se v ní vyskytuje. Využíváme vztahu: $\forall x \forall y\, P(x) \models\!\!\!\dashv \forall x\, P(x)$

1,2) Pokud se proměnná x vyskytuje v obou podformulích, pak lze (se zachováním tautologické ekvivalence) distribuovat kvantifikátor $\forall x$ pouze pod konjunkci a kvantifikátor $\exists x$ pouze pod disjunkci, samozřejmě do obou podformulí.

Sémantika predikátové logiky

Zhrneme předchozí úvahy o vytýkání kvantifikátorů před logické spojky do následujících obecnějších tvrzení.

Tvrzení

Nechť α je formule predikátové logiky.

- $\neg\forall x\,\alpha \models\!\!\!\dashv \exists x\,\neg\alpha$
- $\neg\exists x\,\alpha \models\!\!\!\dashv \forall x\,\neg\alpha$

Vytýkání kvantifikátoru před negaci kvantifikátor "otočí".

Sémantika predikátové logiky

Tvrzení

Nechť α, β jsou formule predikátové logiky.

- $\forall x\, \alpha \wedge \forall x\, \beta \models\!\!\!\!\dashv \forall x\, (\alpha \wedge \beta)$
- $\exists x\, \alpha \vee \exists x\, \beta \models\!\!\!\!\dashv \exists x\, (\alpha \vee \beta)$

Tvrzení

Budiž $\nabla \in \{\forall, \exists\}$, $\Diamond \in \{\wedge, \vee\}$ (napíšeme čtyři tvrzení v jednom).

Nechť α, β jsou formule predikátové logiky, přičemž formule β neobsahuje (volnou) proměnnou x.

- $(\nabla x\, \alpha) \diamond \beta \models\!\!\!\!\dashv \nabla x\, (\alpha \diamond \beta)$
- $\beta \diamond (\nabla x\, \alpha) \models\!\!\!\!\dashv \nabla x\, (\beta \diamond \alpha)$

Sémantika predikátové logiky

Tvrzení

Budiž $\nabla \in \{\forall, \exists\}$, a budiž Δ opačný kvantifikátor k ∇.

Nechť α, β jsou formule predikátové logiky, přičemž formule β neobsahuje (volnou) proměnnou x.

- $(\nabla x\, \alpha) \Rightarrow \beta \models\!\!\!\dashv \Delta x\, (\alpha \Rightarrow \beta)$
- $\beta \Rightarrow (\nabla x\, \alpha) \models\!\!\!\dashv \nabla x\, (\beta \Rightarrow \alpha)$

Vytýkání kvantifikátoru z předpokladu implikace jej "otočí", vytýkání ze závěru imlikace kvantifikátor nezmění.
Toto tvrzení se snadno odvodí z předchozích dvou tvrzení.

Vytýkání kvantifikátorů před ostatní logické spojky řešit nebudeme.

Sémantika predikátové logiky

Poznámka

V předchozích tvrzeních jsme si dovolili psát symbol tautologické ekvivalence mezi obecné formule, přestože jsme ho definovali jen pro sentence. Definován by byl takto:

K formuli doplníme zpředu kvantifikátor $\forall$ s každou proměnnou, která v ní byla volná, tím vytvoříme tzv. obecný uzávěr formule. Dvě formule jsou tautologicky ekvivalentní, když jejich obecné uzávěry jsou tautologicky ekvivalentní.

Sémantika predikátové logiky

Definice

Řekneme, že formule φ je v *prenexním tvaru*, pokud má všechny kvantifikátory vpředu, je tedy tvaru

$$\varphi = \nabla_1 x_1 \nabla_2 x_2 \dots \nabla_n x_n \, \psi \,,$$

kde $\nabla_i \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou všechny vázané proměnné z φ a podformule ψ je otevřená formule (tzv. otevřené jádro formule φ).

Tvrzení

Ke každé sentenci φ lze najít sentenci φ_p, která je v prenexním tvaru, tak, že $\varphi \models\!\!\!\!\!\dashv \varphi_p$.

Sémantika predikátové logiky

Převedení do prenexního tvaru

Sentenci φ převedeme do prenexním tvaru následujícími tautologicky ekvivalentními úpravami:

1. Přejmenujeme vázané proměnné tak, aby každý kvantifikátor vázal jinou proměnnou.
2. Přepíšeme tautologicky ekvivalentně ostatní spojky na $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (což lze, neboť tyto spojky tvoří úplný systém spojek).
3. Dostaneme negaci pod kvantifikátory pomocí De Morganových zákovů a negování kvantifikátorů.
4. Vytkneme kvantifikátory před konjunkce a disjunkce (což zachová tautologickou ekvivalenci, neboť proměnné vázané v různých podformulích se jmenují jinak).

Sémantika predikátové logiky

Převedení do prenexního tvaru

Poznámka: Ve 4. kroku je jedno, zda nejdříve vytýkáme z levé nebo z pravé podformule. Můžeme vytýkat i na přeskáčku, jen nesmíme přehodit pořadí těch kvantifikátorů $\forall$ a $\exists$, které byly u stejné podformule.

Prenexní tvar pro φ tedy není určen jednoznačně.

Příklad

$\varphi = \forall x \exists y\, R(x,y) \vee \exists z\, P(z) \models\!\!\!\!= \forall x \exists y \exists z\, (R(x,y) \vee P(z))$ a také
$\varphi \models\!\!\!\!= \exists z \forall x \exists y\, (R(x,y) \vee P(z)) \models\!\!\!\!= \forall x \exists z \exists y\, (R(x,y) \vee P(z))$

Všimněte si, že $\forall x$ a $\exists z$ zde lze přehodit bez ztráty tautologické ekvivalence, ale jen proto, že proměnné x a z nejsou ve stejné podformuli.

Sémantika predikátové logiky

Literatura

- J. Velebil: Velmi jemný úvod do matematické logiky. Kapitola 3.1. a 3.2. ftp://math.feld.cvut.cz/pub/velebil/y01mlo/logika.pdf
- M. Demlová, B. Pondělíček: Matematická logika, ČVUT Praha, 1997. Kapitola 12.